

А.В. ИВАНОВ, кандидат технических наук, М.К. ЛЕОНТЬЕВ, доктор технических наук
(МАИ, Москва)

МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ РОТОРОВ

Развиваются методы модального анализа для решения задач роторной динамики, позволяющие существенно сократить необходимые вычислительные и временные ресурсы. Рассмотрены алгоритмы, учитывающие изменения инерционных параметров динамических систем роторов, жесткостных характеристик, гироскопических и демпфирующих сил. Предложен алгоритм учета осевых сил, действующих в роторных системах.

К математическим моделям, с помощью которых можно вести моделирование динамических систем роторов, предъявляется ряд требований, от выполнения которых зависит успех в реализации поставленной задачи. Среди них - способность с минимальными затратами решать широкий круг задач для расчета роторных систем, имеющих большое количество степеней свободы. Математические модели должны точно отражать их упругие и инерционные свойства, связи элементов между собой, учитывать различные виды колебаний, условия работы, а также нагрузки.

Для анализа динамического поведения роторных систем широко используются математические модели, в основе которых лежат такие методы, как метод конечных элементов, метод начальных параметров, модальные методы анализа и синтеза [1].

Модальные методы в динамике роторов занимают особое место, так как позволяют существенно сократить вычислительные ресурсы. В этих методах динамическое поведение линейной системы представляется в виде разложения по формам собственных колебаний. Использование полного набора форм собственных колебаний в модальных методах эквивалентно решению уравнений движения дискретной динамической системы в физических координатах и дает точное решение. Однако с достаточной степенью точности решение можно получить, если использовать ограниченный набор форм колебаний, соответствующий нижним частотам. Возможность компромисса между требуемой точностью и трудоемкостью и является одним из преимуществ модальных методов.

Модальные уравнения движения. В общем случае уравнение движения дискретной системы может быть записано в следующем виде:

$$M\ddot{q} + Kq = Q(t), \quad (1)$$

где M – матрица инерции; K - матрица жесткости; q - столбец обобщенных перемещений сечений, в которых располагаются дискретные инерционные элементы системы; Q – столбец обобщенных внешних сил, приложенных в сечениях системы.

Входящие в уравнение (1) столбцы q и Q имеют следующую структуру:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix}; \quad q_i = \begin{bmatrix} u_i^x \\ \theta_i^x \\ u_i^y \\ \theta_i^y \\ u_i^z \\ \vartheta_i^z \end{bmatrix}; \quad Q_i = \begin{bmatrix} P_i^x \\ M_i^x \\ P_i^y \\ M_i^y \\ P_i^z \\ M_i^z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где q_i - столбец обобщенных перемещений в i -м сечении; Q - столбец обобщенных внешних сил в i -м сечении; n - число расчетных сечений в рассчитываемой системе.

Столбцы q_i и Q состоят из проекционных компонент линейного u и углового θ перемещений и соответствующих компонент внешней силы P и внешнего момента M . Положительные направления отсчета компонент показаны на рис 1.

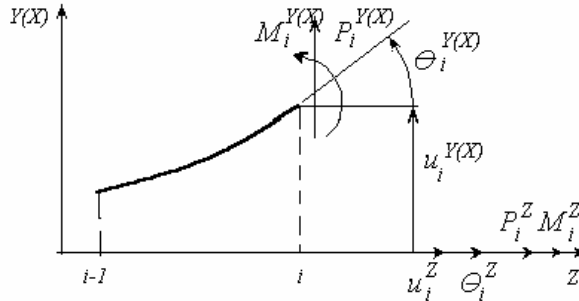


Рис. 1

Если известны собственные частоты и формы колебаний системы, удовлетворяющие уравнению (1) при $Q = 0$, то приближенное решение уравнения (1) можно представить в виде разложения по собственным формам:

$$q = \sum_{i=1}^r \bar{q}(i)e(i) = \bar{q}e \quad (3)$$

где $\bar{q} = [\bar{q}(1), \bar{q}(2) \dots \bar{q}(r)]$ – матрица форм собственных колебаний системы (модальная матрица); $\bar{q}(i)$ – столбец перемещений, описывающий i -ю форму; e – столбец модальных координат; r – число модальных координат.

Выделяя из матрицы \bar{q} соответствующие строки, можно записать разложения по модальным координатам проекций на координатные оси линейного и углового перемещения любого сечения системы:

$$\begin{aligned} u_i^X &= \bar{u}_i^X e; & u_i^Y &= \bar{u}_i^Y e; & u_i^Z &= \bar{u}_i^Z e; \\ \theta_i^X &= \bar{\theta}_i^X e; & \theta_i^Y &= \bar{\theta}_i^Y e; & \theta_i^Z &= \bar{\theta}_i^Z e, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

В силу ортогональности форм собственных колебаний выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \bar{q}^T M \bar{q} &= \bar{M} = \text{diag}(\bar{m}(i)); \\ \bar{q}^T K \bar{q} &= \bar{K} = \text{diag}(\bar{m}(i)p^2(i)), \quad i = 1 \dots m, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{m}(i), p(i)$ - приведенная масса и собственная частота колебаний формы $\bar{q}(i)$. Индекс T означает операцию транспонирования.

Подставляя (2) в (1) и умножая результат на \bar{q}^T , получим уравнение движения системы в модальных координатах:

$$\bar{M}\ddot{e} + \bar{K}e = \bar{Q}(t) \quad (6)$$

где \bar{M} и \bar{K} - модальные (приведенные к модальным координатам) матрицы инерции и жесткости, определяемые соотношениями (5); $\bar{Q}(t)$ - модальный столбец обобщенных внешних сил, рассчитываемый по формуле

$$\bar{Q}(t) = \bar{q}^T Q(t). \quad (7)$$

Увеличение в соотношениях (5) числа модальных координат r приводит к более точному модальному уравнению (6), однако при этом возрастает его размерность и трудоемкость решения. Варьированием числа используемых модальных координат можно менять размерность задачи и получить приемлемый компромисс между точностью и трудоемкостью расчетов.

Переход к модальным координатам позволяет сравнительно легко решать задачи, связанные с уходом системы от опасных резонансов путем изменения инерционных и жесткостных характеристик ее элементов. Не представляет трудностей учет действия гироскопических моментов в роторных подсистемах, действия статических нагрузок, в том числе действия продольных растягивающих или сжимающих сил, а также сил, учитывающих действие нелинейных элементов, имеющих в роторной системе, например подшипников скольжения, демпферов, уплотнений. Все эти задачи решаются на базе одной и той же расчетной модели путем добавления соответствующих модальных матриц без увеличения размерности задачи, определяемой числом модальных координат, используемых при составлении модального уравнения движения системы.

Ниже рассматриваются алгоритмы построения дополнительных модальных матриц, используемых при решении некоторых перечисленных задач.

Модальная матрица изменения инерционных параметров. Инерционные элементы дискретной модели системы сосредотачиваются в расчетных сечениях и характеризуются матрицами инерции, связывающими инерционные силы и моменты с ускорениями перемещений сечений.

Изменение действующих на систему инерционных сил и моментов, связанное с изменением инерционных характеристик инерционного элемента, расположенного в i -м сечении, можно представить в виде действия на систему дополнительных сил и моментов, вычисляемых по формуле

$$\begin{bmatrix} \Delta P^x(i) \\ \Delta M^x(i) \\ \Delta P^y(i) \\ \Delta M^y(i) \\ \Delta P^z(i) \\ \Delta M^z(i) \end{bmatrix} = \Delta M(i) \begin{bmatrix} \ddot{u}^x(i) \\ \ddot{\theta}^x(i) \\ \ddot{u}^y(i) \\ \ddot{\theta}^y(i) \\ \ddot{u}^z(i) \\ \ddot{\theta}^z(i) \end{bmatrix} = \left(\Delta M(i) \begin{bmatrix} \bar{u}^x(i) \\ \bar{\theta}^x(i) \\ \bar{u}^y(i) \\ \bar{\theta}^y(i) \\ \bar{u}^z(i) \\ \bar{\theta}^z(i) \end{bmatrix} \right) \ddot{e}, \quad (8)$$

где $\Delta M(i)$ - изменение матрицы инерционного элемента, расположенного в i -м сечении. Наиболее полное выражение матрицы $\Delta M(i)$ имеет вид

$$\Delta M(i) = \Delta \begin{bmatrix} m & S^z & 0 & 0 & 0 & -S^y \\ S^z & J^y & 0 & J^{yz} & -S^x & J^{yz} \\ 0 & 0 & m & S^z & 0 & S^x \\ 0 & J^{xy} & S^z & J^x & -S^y & J^{xz} \\ 0 & -S^x & 0 & -S^y & m & 0 \\ -S^y & J^{zy} & S^x & J^{zx} & 0 & J^z \end{bmatrix} (i), \quad (9)$$

где m - масса; S^x, S^y, S^z - статические моменты относительно плоскостей YZ, ZX, XY ; J^x, J^y, J^z - моменты инерции относительно осей X, Y, Z ; $J^{yz} = J^{zy}, J^{zx} = J^{xz}, J^{xy} = J^{yx}$ - центробежные моменты инерции.

Вычислив по формуле (7) модальный столбец дополнительных сил, связанных с изменением характеристик инерционных элементов системы, получим:

$$\Delta \bar{Q} = - \sum_i \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \bar{u}^x(i) \\ \bar{\theta}^x(i) \\ \bar{u}^y(i) \\ \bar{\theta}^y(i) \\ \bar{u}^z(i) \\ \bar{\theta}^z(i) \end{array} \right]^T & \begin{bmatrix} \bar{u}^x(i) \\ \bar{\theta}^x(i) \\ \bar{u}^y(i) \\ \bar{\theta}^y(i) \\ \bar{u}^z(i) \\ \bar{\theta}^z(i) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \Delta M(i) \ddot{e}. \quad (10)$$

Из выражения (10) видно, что дополнительные обобщенные модальные силы, описываемые столбцом $\Delta \bar{Q}$, пропорциональны модальным ускорениям \ddot{e} и потому могут рассматриваться как модальные обобщенные силы инерции, порождаемые дополнительной модальной матрицей инерции $\Delta \bar{M}$, вычисляемой по формуле

$$\Delta \bar{M} = \sum \Delta \bar{M}(i), \quad (11)$$

где

$$\Delta \bar{M}(i) = \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \bar{u}^x(i) \\ \bar{\theta}^x(i) \\ \bar{u}^y(i) \\ \bar{\theta}^y(i) \\ \bar{u}^z(i) \\ \bar{\theta}^z(i) \end{array} \right]^T & \begin{bmatrix} \bar{u}^x(i) \\ \bar{\theta}^x(i) \\ \bar{u}^y(i) \\ \bar{\theta}^y(i) \\ \bar{u}^z(i) \\ \bar{\theta}^z(i) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \Delta M(i). \quad (12)$$

Матрица $\Delta \bar{M}(i)$ отражает вклад изменения характеристик i -го инерционного элемента системы в суммарную дополнительную модальную матрицу инерции $\Delta \bar{M}$.

Уравнение движения системы в модальных координатах с учетом изменения характеристик ее инерционных элементов записывается в виде

$$(\bar{M} + \Delta \bar{M}) \ddot{e} + \bar{K} e = \bar{Q}(t). \quad (13)$$

Модальная матрица изменения жесткостных параметров. Изменение жесткостных характеристик элементов системы можно представить как наложение дополнительных упругих безынерционных связей, препятствующих относительным линейным и угловым смещениям расчетных сечений системы.

При описании дополнительной связи, наложенной на i -й элемент, рассматривается схема, в которой одно из граничных сечений элемента – расчетное сечение $n_1(i)$ – полагается абсолютно неподвижным (заделанным), а другое граничное сечение – расчетное сечение $n_2(i)$ – полагается свободным.

Для свободного граничного сечения определяется матрица жесткости $\Delta K(i)$, устанавливающая связь между перемещениями этого сечения (деформациями связи) и нагрузками, которые необходимо приложить к нему, чтобы вызвать эти перемещения:

$$\begin{bmatrix} \Delta P^x(i) \\ \Delta M^x(i) \\ \Delta P^y(i) \\ \Delta M^y(i) \\ \Delta P^z(i) \\ \Delta M^z(i) \end{bmatrix} = \Delta K(i) \begin{bmatrix} \Delta u^x(i) \\ \Delta \theta^x(i) \\ \Delta u^y(i) \\ \Delta \theta^y(i) \\ \Delta u^z(i) \\ \Delta \theta^z(i) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Столбец деформаций связи можно выразить через перемещения ее граничных сечений $n_1(i)$ и $n_2(i)$ в модальных координатах:

$$\begin{bmatrix} \Delta u^x(i) \\ \Delta \theta^x(i) \\ \Delta u^y(i) \\ \Delta \theta^y(i) \\ \Delta u^z(i) \\ \Delta \theta^z(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}^x(i) \\ \Delta \bar{\theta}^x(i) \\ \Delta \bar{u}^y(i) \\ \Delta \bar{\theta}^y(i) \\ \Delta \bar{u}^z(i) \\ \Delta \bar{\theta}^z(i) \end{bmatrix} e = \begin{bmatrix} \bar{u}_{n_2(i)}^x - \bar{u}_{n_1(i)}^x - L_i \bar{\theta}_{n_1(i)}^x \\ \bar{\theta}_{n_2(i)}^x - \bar{\theta}_{n_1(i)}^x \\ \bar{u}_{n_2(i)}^y - \bar{u}_{n_1(i)}^y - L_i \bar{\theta}_{n_1(i)}^y \\ \bar{\theta}_{n_2(i)}^y - \bar{\theta}_{n_1(i)}^y \\ \bar{u}_{n_2(i)}^z - \bar{u}_{n_1(i)}^z \\ \bar{\theta}_{n_2(i)}^z - \bar{\theta}_{n_1(i)}^z \end{bmatrix} e, \quad (15)$$

где L_i - расстояние от сечения $n_1(i)$ связи до сечения $n_2(i)$ вдоль оси Z .

Вычислив по формуле (7) модальный столбец дополнительных сил, связанных с действием на систему деформированных дополнительных связей, получим:

$$\Delta \bar{Q} = - \left(\sum_i \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}^x(i) \\ \Delta \bar{\theta}^x(i) \\ \Delta \bar{u}^y(i) \\ \Delta \bar{\theta}^y(i) \\ \Delta \bar{u}^z(i) \\ \Delta \bar{\theta}^z(i) \end{bmatrix}^T \Delta K(i) \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}^x(i) \\ \Delta \bar{\theta}^x(i) \\ \Delta \bar{u}^y(i) \\ \Delta \bar{\theta}^y(i) \\ \Delta \bar{u}^z(i) \\ \Delta \bar{\theta}^z(i) \end{bmatrix} \right) e. \quad (16)$$

Из выражения (16) видно, что дополнительные обобщенные модальные силы, описываемые столбцом $\Delta \bar{Q}$, пропорциональны модальным перемещениям e и потому могут рассматриваться как реакции дополнительной модальной жесткости $\Delta \bar{K}$, вычисляемой по формуле

$$\Delta \bar{K} = \sum_i \Delta \bar{K}(i), \quad (17)$$

где

$$\Delta \bar{K}(i) = \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}^x(i) \\ \Delta \bar{\theta}^x(i) \\ \Delta \bar{u}^y(i) \\ \Delta \bar{\theta}^y(i) \\ \Delta \bar{u}^z(i) \\ \Delta \bar{\theta}^z(i) \end{bmatrix}^T \Delta K(i) \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}^x(i) \\ \Delta \bar{\theta}^x(i) \\ \Delta \bar{u}^y(i) \\ \Delta \bar{\theta}^y(i) \\ \Delta \bar{u}^z(i) \\ \Delta \bar{\theta}^z(i) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Матрица $\Delta \bar{K}(i)$ отражает вклад изменения жесткостных характеристик i -го элемента системы в суммарную дополнительную модальную жесткость $\Delta \bar{K}$.

Уравнение движения системы в модальных координатах с учетом изменения жесткостных характеристик ее элементов записывается в виде

$$\bar{M}\ddot{e} + (\bar{K} + \Delta \bar{K})e = \bar{Q}(t). \quad (19)$$

Модальная матрица, учитывающая демпфирование и гироскопию. Полагаем, что рассчитываемая система состоит из n_s подсистем, расположенных вдоль оси Z и соединенных между собой n_L связями. Демпфирование в системе осуществляется демпферами, расположенными параллельно с упругими связями подсистем. Каждая подсистема имеет свою скорость вращения ω . Учет по соотношению (7) дополнительных сил демпфирования, связанных с работой присоединенных к системе демпферов, и гироскопических моментов, связанных с вращением подсистем, приводит к появлению в модальном уравнении движения системы дополнительной модальной матрицы \bar{C}

демпфирования и гироскопии. Модальное уравнение движения при этом приобретает следующий вид:

$$\bar{M}\ddot{e} + \bar{C}\dot{e} + \bar{K}e = \bar{Q}(t) . \quad (20)$$

Матрицу \bar{C} можно представить в виде суммы двух матриц:

$$\bar{C} = \bar{C}d + \bar{C}g = \sum_{i=1}^{n_L} \bar{C}d(i) + \sum_{i=1}^{n_S} [\omega(i)\bar{C}g_1(i)] , \quad (21)$$

где $\bar{C}d$ - суммарная модальная матрица демпфирования; $\bar{C}g$ - суммарная модальная матрица гироскопии; $\bar{C}d(i)$ - модальная матрица демпфирования i -го демпфера; $\bar{C}g_1(i)$ - модальная матрица гироскопии i -й подсистемы, рассчитанная для единичной скорости вращения; $\omega(i)$ - скорость вращения i -й подсистемы.

Матрица $\bar{C}d(i)$ вычисляется по формуле

$$\bar{C}d(i) = \begin{bmatrix} \Delta\bar{u}^X(i) \\ \Delta\bar{\theta}^X(i) \\ \Delta\bar{u}^Y(i) \\ \Delta\bar{\theta}^Y(i) \\ \Delta\bar{u}^Z(i) \\ \Delta\bar{\theta}^Z(i) \end{bmatrix}^T C(i) \begin{bmatrix} \Delta\bar{u}^X(i) \\ \Delta\bar{\theta}^X(i) \\ \Delta\bar{u}^Y(i) \\ \Delta\bar{\theta}^Y(i) \\ \Delta\bar{u}^Z(i) \\ \Delta\bar{\theta}^Z(i) \end{bmatrix} . \quad (22)$$

При выводе формулы (22) была использована та же схема, что и при выводе аналогичной формулы (18), где матрица жесткости $\Delta K(i)$ заменена на матрицу демпфирования $C(i)$, модальное перемещение e - на модальную скорость \dot{e} . Деформации демпфера рассчитываются по формуле (15) через перемещения его граничных сечений $n_1(i)$ и $n_2(i)$.

Для демпфера, работающего только на линейные деформации в направлении осей X и Y , матрица $\bar{C}d(i)$ записывается следующим образом:

$$\bar{C}d(i) = \begin{bmatrix} \Delta\bar{u}^X(i) \\ \Delta\bar{u}^Y(i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C^{XX}(i) & C^{XY}(i) \\ C^{YX}(i) & C^{YY}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{u}^X(i) \\ \Delta\bar{u}^Y(i) \end{bmatrix} , \quad (23)$$

где $\Delta\bar{u}^X(i) = \bar{u}_{n_2(i)}^X - \bar{u}_{n_1(i)}^X - L_i\bar{\theta}_{n_1(i)}^X$; $\Delta\bar{u}^Y(i) = \bar{u}_{n_2(i)}^Y - \bar{u}_{n_1(i)}^Y - L_i\bar{\theta}_{n_1(i)}^Y$.

Матрица $\bar{C}g_1(i)$ находится по формуле:

$$\bar{C}g_1(i) = \sum_{k=n_1(i)}^{n_k(i)} (J_p(k) [(\bar{\theta}_k^X)^T \bar{\theta}_k^Y - (\bar{\theta}_k^Y)^T \bar{\theta}_k^X]) , \quad (24)$$

где $n_1(i)$, $n_k(i)$ - номера первого и последнего сечения i -й подсистемы; $J_p(k)$ - полярный момент инерции диска, расположенного в k -м сечении; $\bar{\theta}_k^X$, $\bar{\theta}_k^Y$ - разложение по модальным координатам угловых перемещений k -го сечения в плоскостях XZ и YZ .

При записи формулы (23) было использовано правило знаков, при котором оси X , Y , Z образуют правую систему координат и положительному направлению вращения соответствует направление кратчайшего совмещения оси X с осью Y .

Модальная матрица, учитывающая действие стационарных осевых сил. При нагружении участков подсистем стационарными осевыми силами изменяется их упругое сопротивление поперечным деформациям. Растягивающие силы повышают жесткости участков, сжимающие - понижают. В результате изменяется спектр собственных частот, резонансные режимы и виброактивность системы. Достаточно большие сжимающие нагрузки могут привести к потере устойчивости системы, при которой поперечные

деформации неограниченно возрастают, даже при отсутствии каких-либо поперечных воздействий.

Рассмотрим i -й участок системы, расположенный между сечениями i и $i+1$ (рис.2).

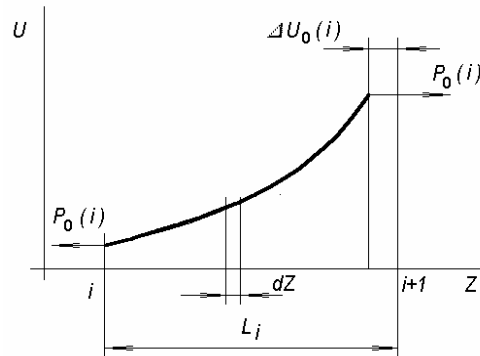


Рис. 2

Участок имеет линейные и угловые смещения и деформации в поперечном направлении (в плоскости XY) и нагружен осевой (действующей в направлении оси Z) растягивающей силой $P_0(i)$. Проекция на ось Z смещенного и деформированного в поперечном направлении участка меньше его длины, поэтому при отклонении участка от исходного расположения (вдоль оси Z) расстояние между граничными участками в проекции на ось Z уменьшается $\Delta U_0(i)$. Приложенная к участку осевая растягивающая сила $P_0(i)$, противодействуя осевому смещению $\Delta U_0(i)$, повышает жесткость системы. При отрицательных значениях сила $P_0(i)$ становится сжимающей, и ее действие приведет к понижению жесткости системы.

Изменение жесткости системы при приложении к ее участкам осевых сил выражается в появлении дополнительной матрицы жесткости $\Delta \bar{K}_0$ в модальном уравнении (6), которое при этом принимает следующий вид:

$$\bar{M}\ddot{e} + (\bar{K} + \Delta \bar{K}_0)e = \bar{Q}(t), \quad (25)$$

где дополнительная модальная матрица $\Delta \bar{K}_0$ вычисляется по формуле:

$$\Delta \bar{K}_0 = \sum_i [P_0(i) \Delta \bar{K}_{01}(i)], \quad (26)$$

где $P_0(i)$ – осевая растягивающая (при отрицательных значениях – сжимающая) сила, приложенная к i -му участку системы; $\Delta \bar{K}_{01}(i)$ – модальная матрица жесткости i -го участка системы, нагруженного единичной осевой растягивающей силой.

Суммирование проводится по всем участкам, на которые действуют стационарные осевые силы.

Алгоритм расчета матрицы $\Delta \bar{K}_{01}(i)$ можно получить из следующей цепочки равенств:

$$\Delta \bar{K}_0 = -\frac{d}{de} \bar{Q}_0 = -\sum_i \frac{d}{de} \bar{Q}_0(i) = -\sum_i \frac{d}{de} [\Delta \bar{U}_0(i) P_0(i)] = -\sum_i \left[P_0(i) \frac{d^2}{de^2} \Delta U_0(i) \right]. \quad (27)$$

Сравнивая (26) и (27), получим

$$\Delta \bar{K}_{01}(i) = -\frac{d^2}{de^2} \Delta U_0(i). \quad (28)$$

Таким образом, для получения матрицы $\Delta \bar{K}_{01}(i)$ необходимо выразить осевое смещение $\Delta U_0(i)$ через модальные координаты.

Пренебрегая деформациями сдвига, получим следующие расчетные соотношения (рис.3):

$$dU_0 = dz \cos \theta - dz ;$$

$$du = dz \sin \theta ,$$

откуда при малых значениях θ следует:

$$\frac{dU_0}{dz} = -\frac{1}{2}\theta^2 = -\frac{1}{2}\left[(\theta^x)^2 + (\theta^y)^2\right]; \quad (29)$$

$$\theta^x = \frac{du^x}{dz}; \quad \theta^y = \frac{du^y}{dz}. \quad (30)$$

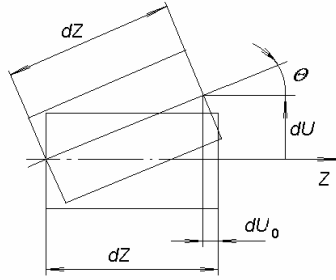


Рис. 3

Поперечные смещения упругой линии i -го участка $u^x(z)$ и $u^y(z)$ можно представить в виде полинома третьей степени:

$$u(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3, \quad (31)$$

в котором коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 определяются из граничных условий:

$$u(0) = u_i; \quad \theta(0) = \theta_i; \quad u(L) = u_{i+1}; \quad \theta(L) = \theta_{i+1}, \quad (32)$$

где $L = L_i$ - длина участка.

С использованием (30) и (31) граничные условия могут быть записаны в виде матричного уравнения:

$$G \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ \theta_i \\ u_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Определив из (33) коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 и поставив их в (31) получим:

$$u(z) = [1 \ z \ z^2 \ z^3]BS(i), \quad (34)$$

где $S(i) = \begin{bmatrix} u_i \\ \theta_i \\ u_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{bmatrix}; \quad B = G^{-1}; \quad \text{индекс}^{-1} \text{ обозначает операцию обращения матрицы.}$

Продифференцировав (31) по z , получим

$$\theta(z) = [0 \ 1 \ 2z \ 3z^2]BS(i). \quad (35)$$

Выражения (31) - (35) записываются одинаково для поперечных деформаций как в направлении оси X , так и в направлении оси Y (в качестве верхних индексов в них могут быть как X , так и Y). Заменяв столбец $S(i)$ на $S^X(i) = \bar{S}^X(i)e$ или $S^Y(i) = \bar{S}^Y(i)e$, выразим (35) через модальные координаты $\theta^X(z)$ или $\theta^Y(z)$:

$$\theta^x(z) = \bar{\theta}^x(z)e; \quad (36)$$

$$\theta^y(z) = \bar{\theta}^y(z)e, \quad (37)$$

где
$$\bar{\theta}^x(z) = [0 \ 1 \ 2z \ 3z^2]B\bar{S}^x(i); \quad (38)$$

$$\bar{\theta}^y(z) = [0 \ 1 \ 2z \ 3z^2]B\bar{S}^y(i). \quad (39)$$

Подставив полученные выражения $\theta^x(z)$ и $\theta^y(z)$ в (29) и проводя интегрирование по длине участка, выразим смещение $\Delta U_0(i)$ через модальные координаты:

$$\Delta U_0(i) = -\frac{1}{2}e \left(\int_0^L [(\bar{\theta}^x)^T \bar{\theta}^x + (\bar{\theta}^y)^T \bar{\theta}^y] dz \right) e \quad (40)$$

В результате подстановки (40) в (28) получим:

$$\Delta \bar{K}_0(i) = \int_0^L [(\bar{\theta}^x)^T \bar{\theta}^x + (\bar{\theta}^y)^T \bar{\theta}^y] dz. \quad (41)$$

Заменив $\bar{\theta}^x$ и $\bar{\theta}^y$ выражениями (37) и (38), получим искомую формулу для расчета матрицы $\Delta \bar{K}_0(i)$:

$$\Delta \bar{K}_0(i) = (\bar{S}^x(i))^T J(i) \bar{S}^x(i) + (\bar{S}^y(i))^T J(i) \bar{S}^y(i), \quad (42)$$

где $\bar{S}^x(i)$, $\bar{S}^y(i)$ - модальные матрицы, описывающие поперечные перемещения граничных сечений i -го участка системы:

$$\bar{S}^x(i) = \begin{bmatrix} \bar{u}^x_i \\ \bar{\theta}^x_i \\ \bar{u}^x_{i+1} \\ \bar{\theta}^x_{i+1} \end{bmatrix}; \quad \bar{S}^y(i) = \begin{bmatrix} \bar{u}^y_i \\ \bar{\theta}^y_i \\ \bar{u}^y_{i+1} \\ \bar{\theta}^y_{i+1} \end{bmatrix}; \quad (43)$$

$J(i)$ - матрица, зависящая от длины $L = L_i$ рассматриваемого i -го участка, вычисляемая по формуле

$$J(i) = \int_0^L ([0 \ 1 \ 2z \ 3z^2]B)^T ([0 \ 1 \ 2z \ 3z^2]B) dz = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Итоговое модальное уравнение движения дискретной модели системы с учетом изменения инерционных и жесткостных характеристик ее элементов, демпфирования, гироскопии и нагружения участков системы продольными растягивающими и сжимающими силами может быть представлено в следующем виде:

$$(\bar{M} + \Delta \bar{M})\ddot{e} + \bar{C}\dot{e} + (\bar{K} + \Delta \bar{K} + \Delta \bar{K}_0)e = \bar{Q}(t). \quad (45)$$

Заключение

Итак, рассмотренные алгоритмы модального анализа охватывают практически все основные задачи, встречающиеся при анализе роторных систем в линейной постановке. Их основное преимущество перед прямыми методами расчета - многократное снижение временных и вычислительных ресурсов при незначительном понижении точности расчетов. Именно этот факт делает их основными для решения задач роторной динамики в нелинейной и нестационарной постановке, когда используется прямое интегрирование

уравнений движения. Представленные алгоритмы используются в известной программной системе Dynamics R3.1, предназначенной для решения задач роторной динамики в линейной и нестационарной постановке [2].

Список использованной литературы

1. Леонтьев М.К., Хронин Д.В., Борздыко Е.В. Анализ динамического поведения роторов с нелинейными упруго-демпферными опорами. 1. “Известия вузов. Авиационная техника”, 1987, №3, стр.19-22.

2. Леонтьев М.К., Иванов А.В., Дегтярев А.А. Программная система для расчета и анализа роторной динамики турбомашин Dynamics R3.1. Свидетельство об отраслевой разработке №2716. Отраслевой фонд алгоритмов и программ. Государственный информационный центр информационных технологий. Министерство образования Российской Федерации. 2003 г.