УДК 629.7.036.34

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОТОРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ВАЛОВ

ЛЕОНТЬЕВ Михаил Константинович

д.т.н. профессор МАИ (Москва)

ИВАНОВ Александр Владимирович

к.т.н., доцент МАИ (Москва)

ДЕГТЯРЕВ Сергей Александрович

Руководитель направления ООО ”Альфа-Транзит” (Химки)

Аннотация

Стержневые модели роторных систем и модальные методы их анализа продолжают оставаться востребованными при решении практических задач роторной динамики вращающихся машин. Существующие алгоритмы и программы анализа таких моделей в основном решают задачи в осесимметричной постановке. Вместе с тем существует большое количество конструкций, в которых требуется строить многовальные модели роторных систем с пространственным расположением осей их подсистем - валов и корпусных элементов, и связей между ними. В статье рассматривается построение уравнений движения для такого рода систем, позволяющих проводить расчеты совместных изгибно-продольно-крутильных колебаний любой пространственной системы, включающей подсистемы с параллельными, скрещивающимися, пересекающимися осями. Приводятся пример расчета такой системы в программе для расчета динамических характеристик вращающихся машин DYNAMICS R4.

Ключевые слова: роторная динамика, пространственные стержневые системы, матрицы жесткости и инерции, DYNAMICS R4

Введение

Современные тенденции в решении задач роторной динамики газотурбинных двигателей (ГТД) определяют необходимость расчета совместных изгибно-крутильно-осевых колебаний для систем с пространственным расположением осей вращения. Такие системы встречаются в воздушно-реактивных двигателях, трансмиссиях вертолетов, трансмиссиях ветровых установок и т.д.

Ранние версии специализированных программ для решения практических задач роторной динамики предназначались в основном для расчета стержневых роторных систем в осесимметричной постановке. Такая постановка характеризуется соосным расположением осей роторов и корпусов, осесимметричной подвеской, расположением инерционных элементов и т.д. Работы в этом направлении велись Д.В. Хрониным [1], А.В. Ивановым А.В., М.К. Леонтьевым [2] в МАИ, В.О. Бауэр [3] в ЦИАМе и другими исследователями.

Появление мощных конечно-элементных программных систем позволило решать задачи динамики с учетом нарушения осевой симметрии роторных систем. Однако их использование вплоть до настоящего времени связано с большой трудоемкостью моделирования и ограничениями для анализа нелинейных задач в нестационарной постановке с такими специфическими элементами роторных систем, как подшипники скольжения, упруго-демпферные опоры, зазоры, подшипники качения и т.д. Поэтому продолжается использование и развитие алгоритмов и программ, ориентирующихся на моделирование и анализ стержневых роторных систем, описываемых специальными элементами - балками, оболочками, подшипниками различных типов и т.д.

Расчет связанных колебаний в роторных системах с пересекающимися осями имеет также первостепенное значение при моделировании систем включающих в себя зубчатые зацепления. В мультипликаторах, редукторах может существовать достаточно большое количество валов (подсистем), разнесенных в пространстве и соединенных между собой зубчатыми парами. Оси могут быть параллельными (цилиндрические зубчатые передачи), пересекающимися (конические), скрещивающимися (гипоидные).

В статье представлены математические модели и алгоритмы расчета пространственных стержневых систем. Приведен пример их использования в программной системе Dynamics R4 [4].

Уравнение движения

Обычно общее уравнение динамики для дискретных линейных колебательных систем в матричной форме обычно записывается как:

$$M \cdot \ddot{q} + C \cdot \dot{q} + K \cdot q = Q(t) \quad . \tag{1}$$

В этом уравнении M – матрица инерции, C - демпфирующая и гироскопическая матрица, K - матрица жесткости, Q – матрица внешних сил, q – матрица перемещений.

При отсутствии демпфирования задача о собственных значениях и векторах описывается уравнением:

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = 0\,. \tag{2}$$

Уравнение (2) может быть также записано через матрицу податливости.

$$A \cdot M \cdot \ddot{q} + I \cdot q = 0\,, \tag{3}$$

где A – матрица податливости, I – единичная матрица.

Уравнения (2) и (3) легко решаются существующими математическими пакетами напрямую. Мы остановимся на случае, когда движение динамической системы описывается уравнением (2).

Рассмотрим математические модели и алгоритмы построения таких матриц для пространственных систем с пересекающимися осями подсистем, из которых она состоит.

Задание систем координат

Пусть обобщенная модель роторной системы состоит из n подсистем, соединенных между собой и с неподвижным основанием m связями. К подсистемам относим структурные элементы конструкции, описываемые балочными, оболочечными и инерционными конечными элементами. Подсистемами могут быть роторы, корпуса, основания и т.д. Предполагается, что осевые линии подсистем являются скрещивающимися прямыми.

На Рис. 1 показано взаимное расположение координатных систем связанных с началом подсистем. С основанием связана глобальная (основная) правая декартова прямоугольная система координат *OXYZ*, а с подсистемами – аналогичные локальные системы $(O'X'Y'Z')^{(i)}$ $i=1\ldots n$.

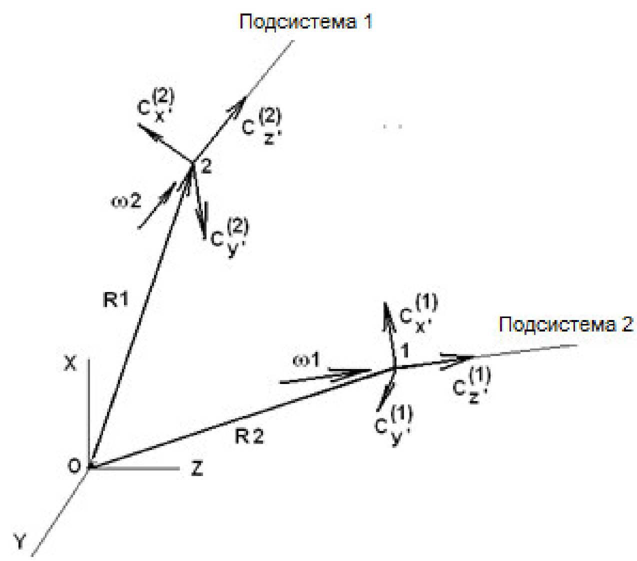


Рис. 1

Оси X (X’) и Y(Y’) во всех подсистемах являются поперечными осями, а ось Z(Z’) – продольной осью. Расположение каждой локальной системы координат относительно основной задается вектором **Ri** и тремя ортами (векторами единичной длины) $\mathbf{C}_{\mathbf{x}'}^{(i)}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{y}'}^{(i)}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{z}'}^{(i)}$.

Вектор **Ri** определяет положение начальной точки *O*’ локальной системы координат и задается столбцом проекций *R* на оси основной координатной системы:

$$R = (Rx, Ry, Rz)^T \tag{4}$$

Верхний индекс *T* в записи *R* и в дальнейшем означает операцию транспонирования.

Орты **Cx**’, **Cy**’, **Cz’** определяют направления соответствующих локальных координатных осей *X’, Y’, Z’* и задаются соответствующими столбцами проекций (направляющих косинусов):

$$Cx' = (Cx'x,\ Cx'y,\ Cx'z)^T;$$
$$Cy' = (Cy'x,\ Cy'y,\ Cy'z)^T; \qquad (5)$$
$$Cz' = (Cz'x,\ Cz'y,\ Cz'z)^T.$$

Столбцы *Cx', Cy', Cz'* образуют матрицу направляющих косинусов *C*:

$$C = \begin{pmatrix} Cx' & Cy' & Cz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx'x & Cy'x & Cz'x \\ Cx'y & Cy'y & Cz'y \\ Cx'z & Cy'z & Cz'z \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

С использованием матрицы *C* (6) преобразования локальных проекций в глобальные проекции и обратно для произвольного вектора **V** записываются следующим образом:

$$V = C \cdot V'; \quad V' = C^T \cdot V. \qquad (7)$$

Ориентация осей локальной системы координат может быть задана тремя углами Эйлера ψ, θ и φ, где ψ - угол прецессии (угол начального разворота осей *X* и *Y* вокруг оси *Z*); θ - угол нутации (угол отклонения оси *Z'* от оси *Z*, полученный вращением вокруг нового положения оси *Y*); φ - угол собственного вращения (угол поворота относительно оси *Z'* системы осей координат, полученной в результате предыдущих операций).

Матрица *C* направляющих косинусов осей локальной системы координат может быть выражена через тригонометрические функции углов Эйлера (8):

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot\sin\psi & \cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot\sin\psi + \sin\varphi\cdot\cos\psi & -\cos\varphi\cdot\sin\theta \\ -\sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot\cos\psi - \cos\varphi\cdot\sin\psi & -\sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot\sin\psi + \cos\varphi\cdot\cos\psi & \sin\varphi\cdot\sin\theta \\ \sin\theta\cdot\cos\psi & \sin\theta\cdot\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix}^T. \qquad (8)$$

Если ориентация осей локальной системы координат задается последовательными поворотами вокруг оси *X*, промежуточного положения оси *Y'* и окончательного положения оси *Z'* на углы α, β и γ соответственно, то транспонированную матрицу C можно получить перемножением трех матриц поворота (9):

$$C^T = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Вращение подсистем задается столбцом угловых скоростей $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$, где ω_i - угловая скорость вращения i-той подсистемы, взятая со знаком '+' или '-'. В принятой нами правой системе координат положительным вращением считается вращение по часовой стрелке, если смотреть в направлении орта ***Cz'*** продольной оси подсистемы. На Рис. 1 показано расположение вектора скорости вращения подсистемы для случая положительного вращения. При изменении направления (знака) вращения изменяется и направление вектора **ω**.

Описание пространственной стержневой системы

Обобщенная модель стержневой системы состоит из ряда пространственных подсистем, соединенных между собой и с неподвижным основанием упругими связями. Каждая подсистема представлена в виде последовательно соединенных элементарных участков, разделенных сечениями. Любое сечение характеризуется набором двух индексов (*s,i*), где *s* - номер подсистемы, *i* – номер сечения в подсистеме, *s = 1,2…nS*, *i=0,1…nel(s), nS* – число подсистем, *nel(s)* – число участков в подсистеме *s*. Номера участков в подсистеме совпадают с номерами сечений, расположенных в конце участка.

Элементарные участки подсистем задаются матрицами жесткости $k_i^{(s)}$, и матрицами инерции $M1_i^{(s)}$ и $M2_i^{(s)}$начального и конечного сечения соответственно. Матрицы жесткости входят в матричные уравнения участков

$$q_i^{(s)} \cdot k_i^{(s)} = Qr_i^{(s)}, \tag{10}$$

Матрицы инерции $M1_i^{(s)}$ и $M2_i^{(s)}$ входят в матричные уравнения, описывающие инерционные нагрузки элементарных участков, приведенные к начальному и конечному сечениям.

$$Qi_{i-1}^{(s)} = -M1_i^{(s)} \cdot \ddot{q}_{i-1}^{(s)};$$

$$Qi_i^{(s)} = -M2_i^{(s)} \cdot \ddot{q}_i^{(s)}, \tag{11}$$

где $Qi_{i-1}^{(s)}$, $\ddot{q}_{i-1}^{(s)}$, $Qi_i^{(s)}$, $\ddot{q}_i^{(s)}$ - столбцы инерционных нагрузок и ускорений перемещений начального и конечного сечений рассматриваемого элементарного участка.

Связи задаются матрицами жесткости $k^{(L)}$, которые входят в матричные уравнения, описывающие деформации связей

$$Qr_2^{(L)} = -k^{(L)} \cdot q_2^{(L)}, \; L = 1,2 \ldots nL, \tag{12}$$

где nL – число связей; $k^{(L)}$ - матрица жесткости связи с порядковым номером L; $q_2^{(L)}$- столбец перемещений конечного сечения; $Qr_2^{(L)}$- столбец реакций связи в конечном сечении, возникающих при перемещениях конечного сечения, заданных столбцом $q_2^{(L)}$, при условии заделки начального сечения.

Начальное и конечное сечение связи совпадают с сечениями подсистем, задаваемых парами индексов (*s1, i1*) и (*s2, i2)* соответственно.

Взаимное расположение сечений подсистем, матрицы жесткости и инерции элементарных участков, матрицы жесткости связей - задаются в локальных системах координат, определенным образом ориентированных относительно единой для всей системы глобальной системы координат OXYZ. Преобразования векторов и матриц, связанные с переходом от локальных систем координат к глобальной координатной системе описано выше.

После перехода в глобальную систему координат расположение сечений s-ой подсистемы в исходном недеформированном состоянии задается радиус векторами $R_i^{(s)}$, как это показано на рис. 2.

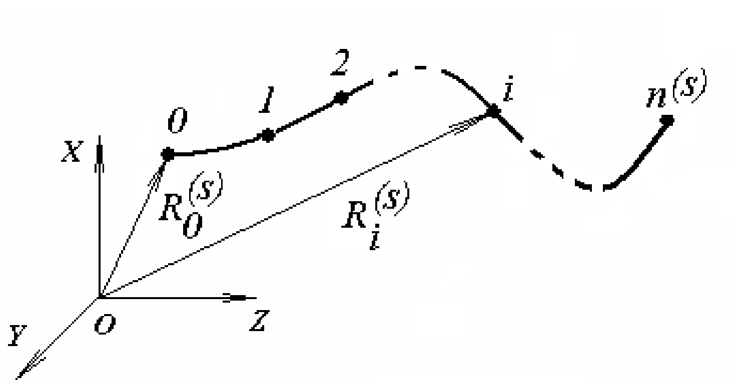


Рис. 2

Перемещения сечений и внутренние нагрузки, действующие на сечение со стороны участка, следующего за сечением, представляются в виде столбцов

$$q = \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix}; \ Q = \begin{pmatrix} P \\ T \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где u, φ, P, T - столбцы проекций на координатные оси векторов линейного перемещения, углового перемещения, силы и момента:

$$u = (u_x, u_y, u_z)^T, \ \varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)^T,$$

$$P = (P_x, P_y, P_z)^T, \;\; T = (T_x, T_y, T_z)^T.$$

Аналогично представляются реакции связей Qr, инерционные нагрузки Qi и внешние нагрузки ΔQ:

$$Qr = \begin{pmatrix} Pr \\ Tr \end{pmatrix}; \quad Qi = \begin{pmatrix} Pi \\ Ti \end{pmatrix}; \quad \Delta Q = \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta T \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Наряду с введенными выше обозначениями в дальнейших описаниях будут использоваться матрицы O_n, I_n, O, I, $W(r)$, которые определяются следующим образом:

O_n и I_n – квадратные нулевая и единичная матрицы порядка n;

O и I – квадратные нулевая и единичная матрицы, порядки которых определяются из контекста;

$W(r)$ – антисимметричная квадратная матрица, используемая при матричной записи векторных произведений. Элементы матрицы $W(r)$ определяются проекциями вектора r на координатные оси

$$W(r) = \begin{pmatrix} 0 & r_Z & -r_X \\ -r_Z & 0 & r_Y \\ r_X & -r_Y & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

С учетом принятых обозначений координат матрицы инерции начального и конечного сечений i – того участка подсистемы s могут быть записаны следующим образом

$$M1_i^{(s)} = \begin{pmatrix} m1 \cdot I_3 & W(S1) \\ W(S1)^T & J1 \end{pmatrix}_i^{(s)}, \qquad S1 = \begin{pmatrix} S1_x \\ S1_y \\ S1_z \end{pmatrix}_1^{(s)};$$

$$M2_i^{(s)} = \begin{pmatrix} m2 \cdot I_3 & W(S2) \\ W(S2)^T & J2 \end{pmatrix}_i^{(s)}, \qquad S2 = \begin{pmatrix} S2_x \\ S2_y \\ S2_z \end{pmatrix}_1^{(s)},$$

где $m1_i^{(s)}, m2_i^{(s)}$ - массы, присоединяемые к начальному и конечному сечению элементарного участка;

$S1_i^{(S)} = \begin{pmatrix} S1_X \\ S1_Y \\ S1_Z \end{pmatrix}_i^{(S)}$, $S2_i^{(S)} = \begin{pmatrix} S2_X \\ S2_Y \\ S2_Z \end{pmatrix}_i^{(S)}$ - столбцы проекций векторов статических моментов масс $m1_i^{(s)}$ относительно начального и масс $m2_i^{(s)}$ относительно конечного сечения элементарного участка соответственно;

$J1_i^{(s)} = \begin{pmatrix} J1_{xx} & J1_{xy} & J1_{xz} \\ J1_{yx} & J1_{yy} & J1_{yz} \\ J1_{zx} & J1_{zy} & J1_{zz} \end{pmatrix}_i^{(s)}$, $J2_i^{(s)} = \begin{pmatrix} J2_{xx} & J2_{xy} & J2_{xz} \\ J2_{yx} & J2_{yy} & J2_{yz} \\ J2_{zx} & J2_{zy} & J2_{zz} \end{pmatrix}_i^{(s)}$ - матрицы моментов инерции масс $m1_i^{(s)}$ относительно начального и масс $m2_i^{(s)}$ относительно конечного сечения элементарного участка соответственно.

Матрица статической жесткости элементарного участка

Жесткость i-го элементарного участка подсистемы s описывается полной матрицей $K_i^{(s)}$, которая входит в матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} Q_{i-1}^{(s)} \\ Q_i^{(s)} \end{pmatrix} = -K_i^{(s)} \cdot \begin{pmatrix} q_{i-1}^{(s)} \\ q_i^{(s)} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Матрица $K_i^{(s)}$ может быть представлена в блочном виде

$$K_i^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}_i^{(s)}. \tag{17}$$

Матрицы статической жесткости упругой связи между подсистемами

Полная жесткость $K^{(L)}$ упругой связи с порядковым номером *L* определяется матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}^{(L)} = -K^{(L)} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}^{(L)}, \qquad (18\ )$$

где $q_1{}^{(L)} = (q_{i1}^{(s1)})^{(L)}$ и $q_2{}^{(L)} = (q_{i2}^{(s2)})^{(L)}$ – столбцы перемещений начального и конечного сечения связи соответственно;

$Q_1{}^{(L)} = (Q_{i1}^{(s1)})^{(L)}$ и $Q_2{}^{(L)} = (Q_{i2}^{(s2)})^{(L)}$ - столбцы реакций связи в указанных сечениях.

Матрица $K^{(L)}$ может быть представлена в блочном виде

$$K^{(L)} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}^{(L)}. \qquad (19)$$

Блоки, входящие в выражение (19), вычисляются через известную матрицу жесткости $K^{(L)}$ свободного конечного сечения связи при заделанном начальном сечении по формулам:

$$K_{11}^{(L)} = D^T \cdot K_{22}^{(L)} \cdot D; \quad K_{12}^{(L)} = -D^T \cdot K_{22}^{(L)};$$
$$K_{21}^{(L)} = (K_{12}^{(L)})^T; \quad K_{22}^{(L)} = k^{(L)}, \qquad (20)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} I_3 & W(r) \\ 0_3 & I_3 \end{pmatrix}, \quad r = (R_{i2}^{(s2)})^{(L)} - (R_{i1}^{(s1)})^{(L)};$$

$(R_{i2}^{(s2)})^{(L)}$ и $(R_{i1}^{(s1)})^{(L)}$ - радиусы векторы начального и конечного сечения связи.

Построение матрицы жесткости динамической системы

Полная матрица жесткости всей системы получается наложением матриц жесткостей элементарных участков и связей обычным способом, используемым во всех конечно-элементных системах.

Матрица подсистемы *s*, получается наложением матриц ее элементарных участков по следующей схеме:

$$K^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & O_6 & \cdots & O_6 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & O_6 \\ O_6 & K_{32} & K_{33} & \cdots & O_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_6 & O_6 & O_6 & \cdots & K_{n+1,n+1} \end{pmatrix}^{(s)}, \qquad (21)$$

где

$$K_{11}^{(s)} = (K_{11})_1^{(s)}; \quad K_{12}^{(s)} = (K_{12})_1^{(s)};$$
$$K_{21}^{(s)} = (K_{21})_1^{(s)}; \quad K_{22}^{(s)} = (K_{22})_1^{(s)} + (K_{11})_2^{(s)}; \quad K_{23}^{(s)} = (K_{12})_2^{(s)};$$
$$K_{32}^{(s)} = (K_{21})_2^{(s)}; \quad K_{33}^{(s)} = (K_{22})_2^{(s)} + (K_{11})_3^{(s)}; \quad \cdots$$
$$\cdots \quad K_{n+1,n+1}^{(s)} = (K_{22})_{n(s)}^{(s)}.$$

Процедура формирования матрицы подсистемы графически представлена на рис. 3. Полные матрицы жесткости элементарных участков, размером 12х12, располагаются по диагонали. Места наложения, в которых производится суммирование диагональных блоков полных матриц элементарных участков, показаны более темным цветом и соответствуют матрицам жесткости внутренних сечений подсистемы, разделяющих соседние элементарные участки. Эти матрицы имеют размер 6х6.

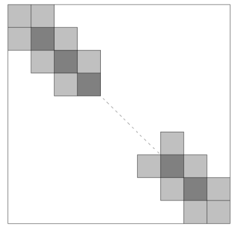


Рис. 3

Полная матрица жесткости системы, состоящей из n несвязанных между собой подсистем, является блочно-диагональной матрицей, составленной из матриц входящих в нее подсистем

$$K = diag(\, K^{(1)},\ K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}\,)\,. \tag{22}$$

Графическое изображение такой матрицы представлено на рис. 4.

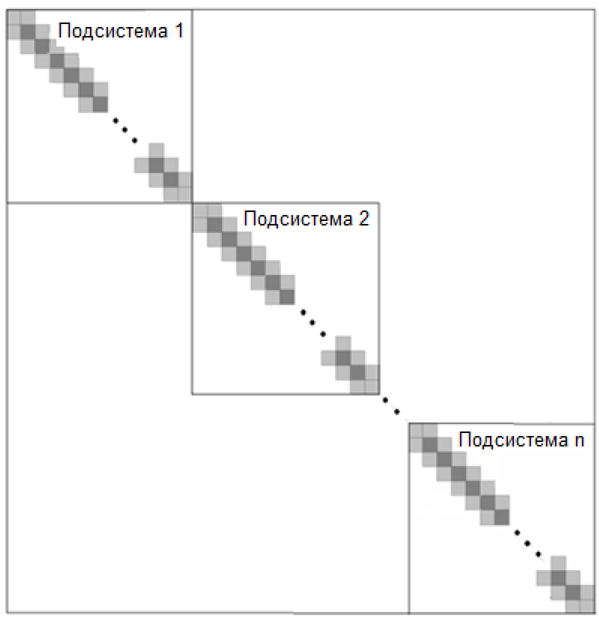


Рис. 4

Добавление упругой связи сводится к суммированию блоков полной матрицы добавляемой связи с блоками полной матрицы системы. При добавлении связи с порядковым номером L , начальное сечение которой является сечением $i1$

подсистемы *s1*, а конечное сечение – сечением *i2* подсистемы *s2*, суммирование блоков производится по следующей схеме:

$$\begin{aligned} &K_{i1,i1}^{(s1,s1)} \Leftarrow K_{i1,i1}^{(s1,s1)} + K_{11}^{(L)}; \quad K_{i1,i2}^{(s1,s2)} \Leftarrow K_{i1,i2}^{(s1,s2)} + K_{12}^{(L)}; \\ &K_{i2,i1}^{(s2,s1)} \Leftarrow K_{i2,i1}^{(s2,s1)} + K_{21}^{(L)}; \quad K_{i2,i2}^{(s2,s2)} \Leftarrow K_{i2,i2}^{(s2,s2)} + K_{22}^{(L)}, \end{aligned} \tag{23}$$

где верхние индексы являются индексами блочно диагональной матрицы, образованной матрицами подсистем, а нижние индексы - индексами сечений, выделяющих внутри блоков этой матрицы подблоки соответствующих сечений.

На рис. 5 в качестве примера дано графическое изображение процедуры преобразования полной матрицы системы, показанной на рис. 4, при добавлении связи, соединяющей второе сечение первой подсистемы с пятым сечением второй подсистемы.

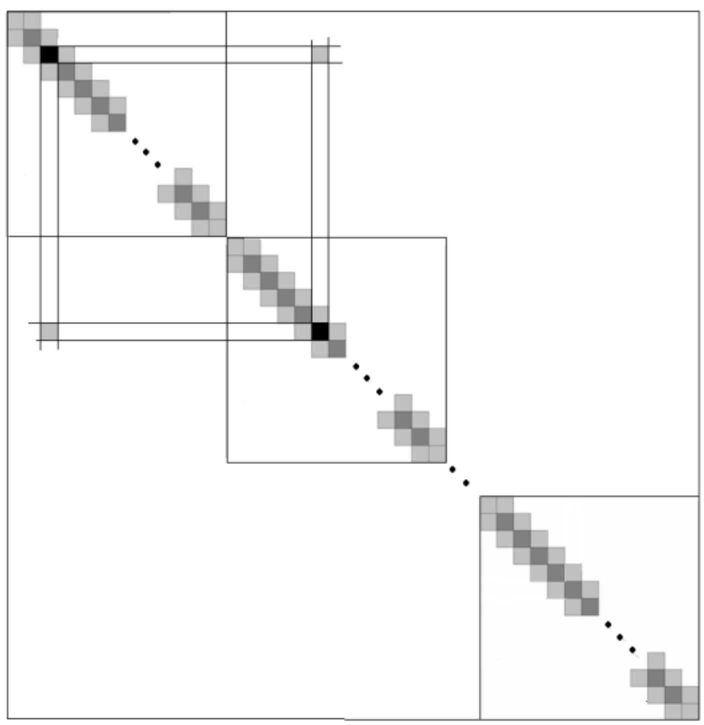


Рис. 5

В результате описанных выше операций получается полная матрица статической жесткости системы, с помощью которой можно определить внешние нагрузки ΔQ, которые надо приложить к сечениям системы, чтобы получить заданные перемещения q этих сечений. Соответствующее матричное уравнение имеет вид

$$\Delta Q = K \cdot q\,, \tag{24}$$

где q – столбец перемещений всех сечений системы, начиная с начального нулевого сечения первой подсистемы и кончая последним сечением.

последней подсистемы; ΔQ - столбец внешних нагрузок, соответствующих перемещениям столбца q.

Построение матрицы инерции динамической системы

Полная матрица инерции M системы является блочно диагональной матрицей, составленной из матриц инерции подсистем

$$M = diag(\,M^{(1)}, M^{(2)}, ..., M^{(nS)}\,)\,. \tag{25}$$

Матрицы инерции подсистем также являются блочно-диагональными матрицами, составленными из матриц инерции сечений. Матрицы инерции сечений подсистемы s составляются из матриц инерции элементарных участков по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
&M_{11}^{(s)} = M1_1^{(s)};\\
&M_{22}^{(s)} = M2_1^{(s)} + M1_2^{(s)}; \quad M_{33}^{(s)} = M2_2^{(s)} + M1_3^{(s)}; \ldots, \quad M_{n(s),n(s)}^{(S)} = M2_{n(s)}^{(s)} + M1_{n(s)+1}^{(s)};\\
&M_{n(s)+1,n(s)+1}^{(s)} = M2_{n(s)}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{26}$$

В результате описанных операций получается полная матрица инерции системы, с помощью которой можно определить инерционные внешние нагрузки Qi, которые надо приложить к сечениям системы, движущимся с заданными ускорениями $\ddot{q}$, чтобы обеспечить равновесие приложенных к системе сил и моментов и, в соответствии с принципом Даламбера, свести динамическую задачу к задаче статической. Соответствующее матричное уравнение имеет вид

$$Qi = -M \cdot \ddot{q}\,. \tag{27}$$

Пример расчета стержневой пространственной системы

На рис. 6 приведена динамическая система из трех стержневых подсистем, соединенных между собой жесткими связями.

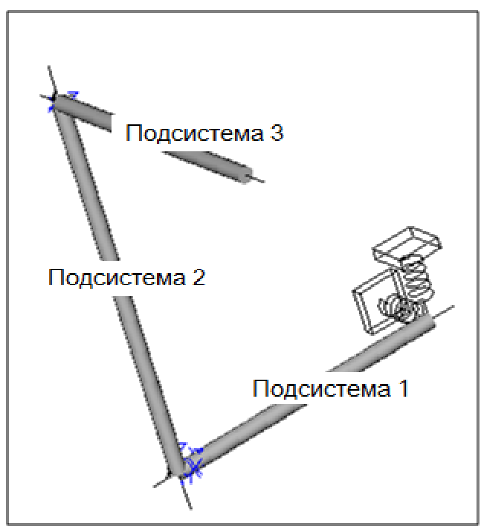


Рис. 6

Подсистемы 1, 2 и 3 расположены друг к другу под прямыми углами, так как показано на рисунке. Описываются цилиндрическими балками со следующими параметрами:

- диаметр балок D_1=D_2=D_3= 50 мм;

- длина балок $L_1=L_3$=900 мм, L_2= 1200 мм;
- плотность материала ρ=7850 кг/м^3;
- модуль упругости 1-го рода E=$2.1\cdot10^{11}$ Н/м^2;
- коэффициент Пуассона μ=0.3.

Матрицы жесткости связей между подсистемами диагональные. Прямые коэффициенты жесткости связей по всем степеням свободы имеют значения $1\cdot10^{11}$ N/m, что приближает их к абсолютно жестким связям.

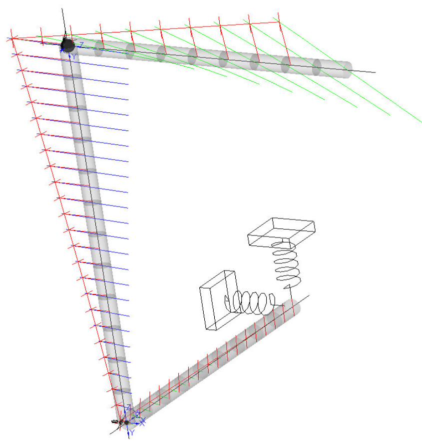
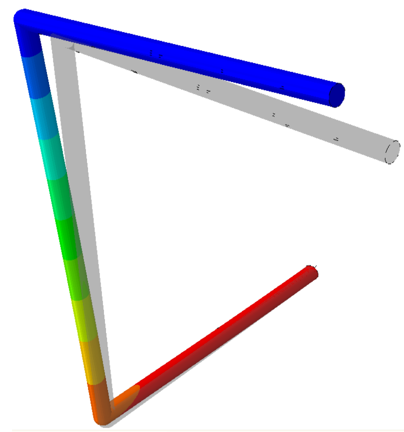
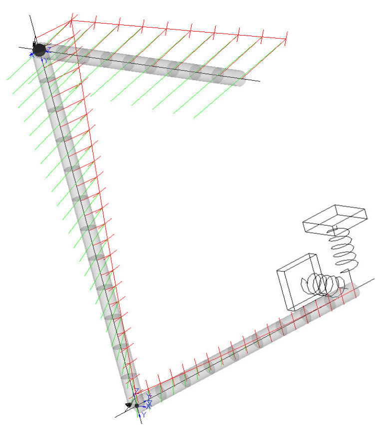
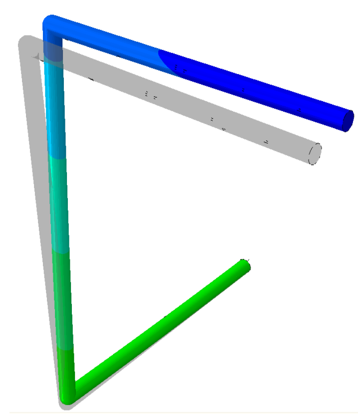
В таблице 1 показаны частоты собственных колебаний исследуемой пространственной системы, полученные по разработанным алгоритмам и полученные в конечно-элементной программе. Рассчитаны первые 13 форм колебаний. В приведенных формах колебаний (таблица 2) выделены только поперечные перемещения, крутильные и осевые перемещения не показаны, чтобы не загромождать рисунки.

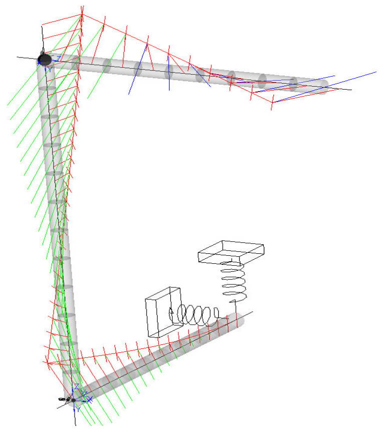
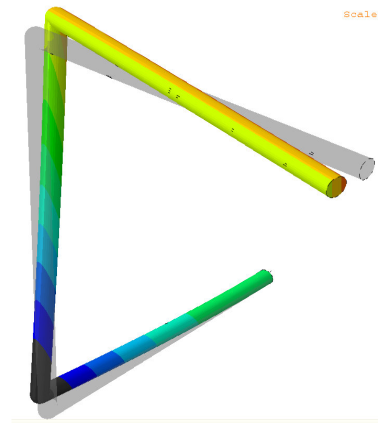
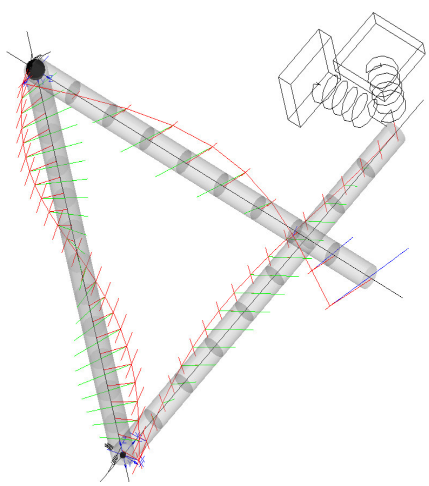
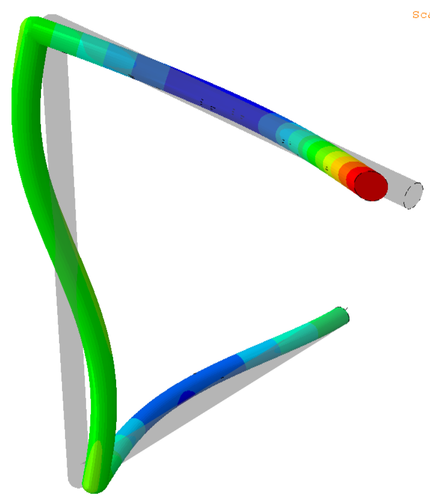
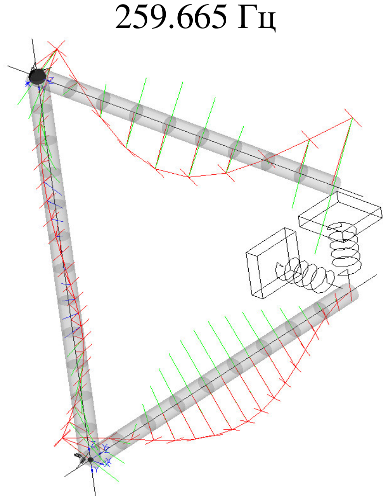
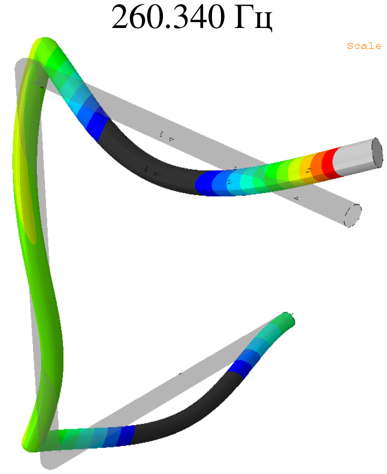
Таблица 1

№ формы	DYNAMICS R4	МКЭ балочные элементы	Погрешность
	Гц	Гц	%
0	5.304	5.303	0.02
1	5.890	5.889	0.02
2	16.952	16.941	0.07
3	18.498	18.492	0.03
4	31.504	31.490	0.04
5	45.970	45.942	0.06
6	103.709	103.780	-0.07
7	125.055	125.140	-0.07
8	220.269	221.150	-0.40
9	220.917	221.570	-0.30
10	257.174	257.900	-0.28
11	259.665	260.340	-0.26

12	362.708	363.770	-0.29
13	386.225	387.660	-0.37

Таблица 2

Dynamics R4	МКЭ
5.304 Гц 	5.303 Гц 
5.890 Гц 	5.889 Гц 

16.952 Гц 	16.941 Гц 
220.269 Гц 	221.150 Гц 
259.665 Гц 	260.340 Гц 

Сравнение полученных частот и форм колебаний показывает практически полную сходимость результатов.

Выводы

Разработаны математические модели, алгоритмы и программный модуль для моделирования и анализа сложных пространственных систем, состоящих из стержневых подсистем с упругими связями между собой в среде программной системы DYNAMICS R4. Применение этих разработок позволяет рассчитывать совместные изгибно-продольные колебания многовальных динамических систем с учетом пространственного расположения их валов, корпусов, инерционных элементов, подвески и т.д.

Благодарности

Авторы выражают благодарность компании ООО “Альфа-Транзит” (Россия) и компании INA (Германия), предоставивших возможность и средства провести необходимые разработки и исследования.

Список использованных источников

1. Д.В. Хронин. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов, М.: Машиностроение, 1980 г. -411 с.

2. А.В. Иванов, М.К. Леонтьев. Модальный анализ динамических систем роторов “Известия высших учебных заведений. Авиационная техника”. 2005, №3. С.31-35.

3. В.О. Бауэр, И.А. Биргер и др. Динамика авиационных двигателей, М.: Машиностроение, 1981 г. - 232 с.

4. Леонтьев М.К., Дегтярев С.А. и др. Программная система расчета динамики роторов Dynamics 4. Свидетельство об отраслевой разработке №6691. Отраслевой фонд алгоритмов и программ. Государственный информационный центр информационных технологий. Министерство образования Российской Федерации. 2006 г.

УДК 629.7.036.34

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОТОРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ВАЛОВ

Авторы

Леонтьев М.К., Иванов А.В., Дегтярев С.А.

Аннотация

Стержневые модели роторных систем и модальные методы их анализа продолжают оставаться востребованными при решении практических задач роторной динамики . Существующие алгоритмы и программы анализа таких моделей в основном решают задачи в осесимметричной постановке. Вместе с тем существует большое количество конструкций, в которых требуется строить многовальные модели роторных систем с пространственным расположением осей их подсистем - валов и корпусных элементов. В статье рассматривается построение уравнений движения для такого рода систем, позволяющих проводить расчеты совместных изгибно-продольно-крутильных колебаний любой пространственной системы, включающей подсистемы с параллельными, скрещивающимися, пересекающимися осями. Приводятся пример расчета такой системы в программе для расчета динамических характеристик вращающихся машин DYNAMICS R4.

Ключевые слова: *роторная динамика, пространственные стержневые системы, матрицы жесткости и инерции, DYNAMICS R4*

Сведения об авторах

Леонтьев Михаил Константинович, профессор Московского авиационного института (государственного технического университета); доктор технических наук. МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: 8-985-768-71-29; e-mail: lemk@alfatran.com

Иванов Александр Владимирович, доцент Московского Авиационного института; кандидат технических наук. МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: 8 -499-158-44-72.

Дегтярев Сергей Александрович, руководитель направления Научно-технического центра по роторной динамике ООО ”Альфа-Транзит”. Россия, Московская обл., 141400, г. Химки, ул. Ленинградская, 1; tel.: 8-495-232-60-91, e-mail: degs@alfatran.com

SIMULATING OF ROTOR DYNAMIC SYSTEMS WITH SPATIAL SHAFTS POSITIONS

Authors: Leontiev M.K., Ivanov A.V., Degtyarev S. A.

Annotation

Bar models of rotor systems and modal analysis methods continue to be important in solution of practical tasks of rotor dynamics. The existing algorithms and programs solve mainly the multi-shaft rotor system in axisymmetric statement. However, there are a large number of designs, for which it is necessary to build a rotor dynamic models with spatial arrangement of the shafts and another body elements. This article focuses on building equations of motion for such systems to enable calculations of coupled lateral-axial-torsional oscillations of any spatial system consisting of subsystems with skew and intersecting axes. Calculation example of spatial core system by means of DYNAMICS R4 software are given

Keywords: *rotor dynamics, bar models, spatial shaft positions, stiffness and inertia matrixes, DYNAMICS R4*

Leontiev Mikhail Konstantinovich, professor of Moscow Aviation Institute (State Technical University), PhD, Doctor of Technical Science, MAI, Volokolamskoe road., 4, Moscow, A-80, GSP-3, 125993; tel.: 8-985-768-71-29; e-mail: lemk@alfatran.com

Ivanov Aleksandr Vladimirovich, lecturer of Moscow Aviation Institute (State Technical University), PhD, MAI, Volokolamskoe road., 4, Moscow, A-80, GSP-3, 125993; tel.: 8-499-158-44-72.

Degtyarev Sergey Aleksandrovich, project chairman, scientific and technical centre of rotor dynamic Alfa-Tranzit LTd., Co, Russia , Moscow region, 141400, Khimky, Leningradskaya street, 1 Tel/fax: 7-495- 2326091 Tel: 7-495- 7687129 www.alfatran.com, e-mail: degs@alfatran.com