

УДК 621.313.1

Дегтярев С.А.

Кутаков М. Н.

Леонтьев М.К.

## **ДИНАМИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН С УЧЕТОМ МАГНИТНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ**

### **Сведения об авторах**

Дегтярев Сергей Александрович, руководитель направления Научно-технического центра по роторной динамике ООО "Альфа-Транзит". Россия, Московская обл., 141400, г. Химки, ул. Ленинградская, 1; тел.: 8-495-232-60-91, e-mail:

[degs@alfatran.com](mailto:degs@alfatran.com)

Кутаков Максим Николаевич, студент Московского авиационного института (национального исследовательского университета). МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: 8-926-881-55-48; e-mail:

[maxim.kutakov@alfatran.com](mailto:maxim.kutakov@alfatran.com)

Леонтьев Михаил Константинович, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета); доктор технических наук. МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: 8-985-768-71-29; e-mail: [lemk@alfatran.com](mailto:lemk@alfatran.com)

### **Аннотация**

В статье рассматриваются вопросы учета электрических магнитных сил, возникающих в электрических моторах и генераторах, в задачах роторной динамики. Представлен обзор существующих решений при определении магнитных сил, отмечен их нелинейный характер. Показан алгоритм решения задачи о динамическом поведении ротора с электрической магнитной силой в нестационарной постановке. В качестве примера исследуется модель гидрогенератора. Показано влияние магнитных сил на динамические характеристики гидрогенератора.

**Ключевые слова:** Роторная динамика, одностороннее магнитное притяжение, электрические машины, эксцентриситет ротора, Dynamics R4.

### Принятые обозначения

$F_{UMP}$ - сила одностороннего магнитного притяжения (unbalanced magnetic pull - UMP)	$R$ - радиус ротора
$\sigma$ – тензор напряжений Максвелла	$l$ – длина активной части ротора
$S$ – площадь поверхности	$D$ - диаметр ротора
$n$ – вектор нормали к поверхности	$\varphi$ - угловая координата
$B$ - индукция магнитного поля	$R_s$ - внутренний радиус статора
$B_\delta$ - индукция магнитного поля в воздушном зазоре (номинальное значение)	$S_s$ - линейная нагрузка в статоре
$\mu_0$ – магнитная проницаемость воздуха	$p$ – количество пар полюсов
$k_c$ – коэффициент Картера	$\delta_0$ - номинальный воздушный зазор
	$e$ – эксцентриситет ротора
	$\mathcal{E}$ - относительный эксцентриситет ротора
	$r, \theta$ - соответственно индексы радиальных и тангенциальных компонент

## **Введение**

Механические колебания в электрических машинах специфичны вследствие наличия переменного магнитного поля. В случае возникновения неравномерности воздушного зазора между ротором и статором, вследствие статического или динамического эксцентриситета ротора, электромагнитное поле вызывает одностороннюю радиальную силу, приложенную к центру ротора и направленную в сторону наименьшего воздушного зазора. Эта сила получила название – одностороннее магнитное притяжение (unbalanced magnetic pull - UMP).

Одностороннее магнитное притяжение является источником вынужденных колебаний в гидрогенераторах и асинхронных электродвигателях. В гидрогенераторах большое влияние электромагнитных сил на вибрации ротора объясняется как многополюсностью, так и относительно меньшим радиальным зазором между ротором и статором. В асинхронных двигателях переменного тока весьма мал зазор между ротором и статором, поэтому UMP оказывается сравнимым с неуравновешенными силами [1]. Кроме того, влияние UMP на роторную динамику проявляется и в других типах электрических машин [2]. В связи с этим учет UMP является важной задачей в анализе роторной динамики электромашин.

В настоящее время проблема полноценного учета UMP в анализе роторных систем, а так же оценка влияния электромагнитных сил на роторную динамику электромашин представляет собой комплексную задачу. Много исследований в области роторной динамики посвящено изучению воздействия UMP на роторные системы. R. Gustavson исследует стабильность роторов гидрогенераторов с учетом

UMP [3]. Paolo Pennacchi показывает нелинейные эффекты воздействия UMP на турбогенератор. [2]. Z Song и Z Ma исследуют влияние UMP на собственные частоты роторных систем [4]. Mattias Nässelqvist использует UMP в исследовании роторной динамики гидрогенераторов [5]. Arkkio A. исследует UMP и его влияние на динамику электродвигателей в работах [6,7].

## **Общая теория**

Величина UMP зависит от многих факторов: эксцентриситета ротора, геометрических размеров машины, величины индукции магнитного поля в воздушном зазоре, магнитных свойств материала ротора, наличия в обмотке статора параллельных витков. Учет всех факторов до сих пор является сложной задачей.

Существуют аналитические и численные методы расчета UMP. Численные методы основаны на совместном решении уравнений, описывающих магнитное поле и циркуляцию тока в обмотке. Они обеспечивают высокую степень точности конечного решения, учет насыщения и других сложных нелинейных явлений, возникающих в электрических машинах [8]. Для решения этой задачи сегодня используется метод конечных элементов. Однако, даже используя современные мощные компьютеры, расчеты в МКЭ системах моделей со сложной трехмерной геометрией требуют много времени и являются трудоемкой задачей. Поэтому часто магнитное поле принимают двумерным, то есть поле принимают не зависящим от координаты оси, совпадающей с осью вращения ротора. Такой подход позволяет

учитывать большинство факторов влияющих на UMP и получить достаточно точные результаты [6], [8], [9].

Отдельно можно выделить метод, представленный в работе [7]. Этот метод основан на результатах моделирования численными методами и теоретического анализа электрической машины. Суть метода в том, что соотношение между UMP и эксцентриситетом ротора может быть выражено простой параметрической зависимостью

$$F_{em}(s) = K(s)z(s), \quad (1)$$

где  $F_{em}(s)$  - сила электрического взаимодействия;  $z(s)$  – функция, описывающая смещение центра ротора,  $s = i\omega$  - переменная Лапласа,  $K(s)$ - функция переноса второго порядка.

$$K(s) = k_0 + \frac{k_{p-1}}{s - a_{p-1}} + \frac{k_{p+1}}{s - a_{p+1}}, \quad (2)$$

где  $k_0$ ,  $k_{p-1}$ ,  $k_{p+1}$ ,  $a_{p-1}$ ,  $a_{p+1}$  - параметры модели, полученные с помощью применения численного расчета, проведенного на основе анализа электрической машины методом конечных элементов;  $P$  — количество пар полюсов в машине.

Применение указанных выше методов дает результаты с хорошей точностью, но для решения задач динамики практическое значение имеет применение аналитических методов. Преимущества аналитических методов заключаются в оперативности получения результатов в такой форме, которая является простой для интерпретации.

Аналитические методы расчета UMP чаще всего основаны на использовании тензора напряжений Максвелла [8], [3]. Для нахождения силы необходимо вычислить интеграл от тензора по площади.

$$F_{UMP} = \oint_S \sigma \cdot ndS \quad (3)$$

Основные компоненты тензора Максвелла для магнитного поля можно записать:

$$\sigma_r = \frac{1}{2\mu_0} (B_r^2 - B_\theta^2), \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\mu_0} B_r B_\theta. \quad (5)$$

Величина  $B_\theta$  незначительна и для упрощения принимается равной 0. В итоге получаем интеграл, решением которого является величина UMP [8].

$$F_{UMP} = \frac{lR}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} B_r^2 nd\varphi, \quad (6)$$

Существует множество решений этой задачи, в зависимости от тех или иных допущений. Самым простым решением является линейная зависимость UMP от эксцентриситета [10].

$$F_{UMP} \approx \pi D l \left( \frac{B_\delta}{5000} \right) \frac{\varepsilon}{2k_c}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon = \frac{e}{\delta_0}$ .

Можно также рассчитать коэффициент магнитной жесткости  $k_e$  [11].

$$k_e = \frac{\pi D l B_\delta^2}{4 \mu_0 \delta_0}. \quad (8)$$

Нелинейные зависимости дают более точные значения [12]. Например, существует аналитическая формула, предназначенная для расчета УМР в изотропных электромашинах

$$F_{UMP} = \frac{l \cdot J(\varepsilon, p) \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_s \cdot \left(\frac{B_\delta}{k_c}\right)^2}{2 \cdot \mu_0} \quad (9)$$

где  $J(\varepsilon, p)$  - функция, зависящая от относительного эксцентриситета ротора  $\varepsilon$  и количества пар полюсов  $p$ .

Функция  $J(\varepsilon, p)$  имеет вид

$$J(\varepsilon, p) = \frac{\varepsilon^2 - \left(\frac{(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})}{\varepsilon}\right)^{2p} \cdot (\varepsilon^2 + 2 \cdot p \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2})}{2 \cdot \varepsilon \cdot (\sqrt{1 - \varepsilon^2})^3}. \quad (10)$$

Результаты расчета с использованием этой формулы дают неплохую сходимость с экспериментом [12].

Гидрогенераторы имеют большое число полюсов. Для них среднее значение УМР можно записать [13]

$$F_{UMP} = \frac{\mu_0 S_s^2 R_s^3 l \pi}{2(2p)^2 \delta_0^2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3}}. \quad (11)$$

Формулы (9) и (11) представляют собой наиболее простые нелинейные зависимости УМР от эксцентриситета, поэтому они широко применяются.

### Уравнения движения роторной системы

Для решения задачи учета УМР в динамике роторных систем были разработаны алгоритм и программный модуль для моделирования и анализа в среде программной системы Dynamics R4 [14].

В нелинейной постановке матричное уравнение, описывающее нелинейную динамическую модель роторной системы, имеет вид:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} + \{R\}, \quad (12)$$

где  $[M]$  – матрица инерционных коэффициентов,  $[C]$  – матрица коэффициентов демпфирования,  $[K]$  – матрица коэффициентов жесткости,  $\{\ddot{u}\}, \{\dot{u}\}, \{u\}$  – соответственно столбцы виброускорений, виброскоростей и виброперемещений;  $\{F(t)\}$  – динамические нагрузки любых типов – внутренние и внешние;  $\{R\}$  – реакции нелинейной связи, учитывающей возникающую магнитную силу между ротором и статором.

В Dynamics R4 модель роторной системы формируется из стержневых подсистем, соединенных между собой упругими связями. Подсистема является структурным элементом модели, построенным из стандартных элементов – балок, оболочек, дисков и т.д. Связью называется математическая модель взаимодействия подсистем между собой и с основанием. Моделирование связи осуществляется путем приложения одной и той же силы к двум взаимодействующим подсистемам. По третьему закону Ньютона силы имеют разные знаки, но равны по величине. Эти силы называются реакциями связи.

Модель нелинейной связи создана на основе уравнений (9) и (11). В случае моделирования УМП в асинхронной машине используется уравнение (9). В случае гидрогенератора - уравнение (11). Это связано с некоторыми особенностями каждого из типов машин, приведенными выше.

Для интегрирования уравнения (12) можно применить различные методы, например, метод Рунге-Кутты, метод Адамса, разностные методы и т.д. Общая схема расчета представлена на Рис. 1.

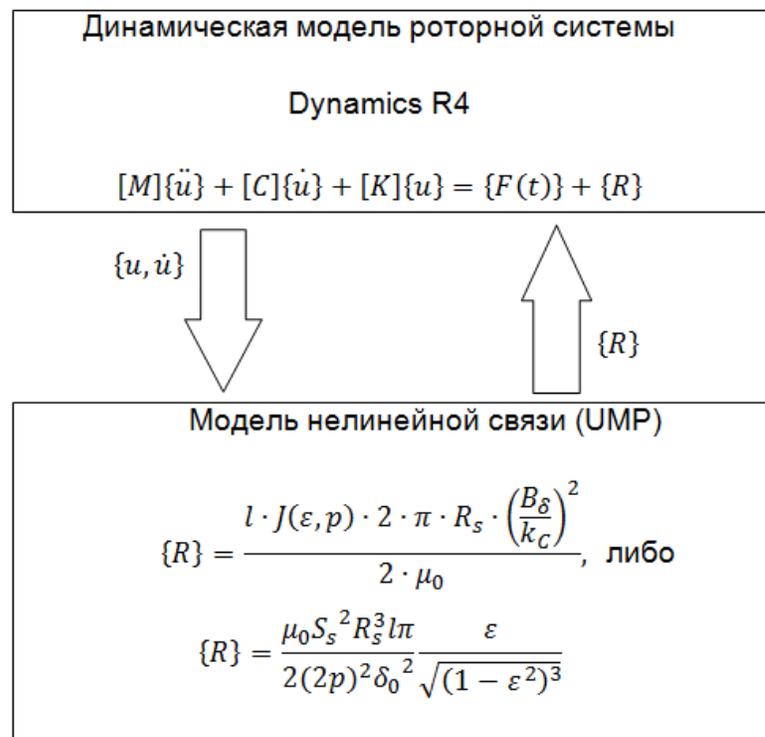


Рис. 1 Взаимодействие моделей роторной системы и модели УМП в процессе интегрирования

В линейной постановке уравнение (12) можно упростить, учитывая магнитную силу через коэффициент жесткости, получаемый из уравнения (8).

## Модель роторной системы

Для исследования воздействия УМП на роторные системы была использована осесимметричная модель гидрогенератора. Модель создана в программной системе для анализа динамических характеристик вращающихся машин Dynamics R4, Рис. 2 Модель генератора в Dynamics R4.. Исходные данные представлены в табл. 1.

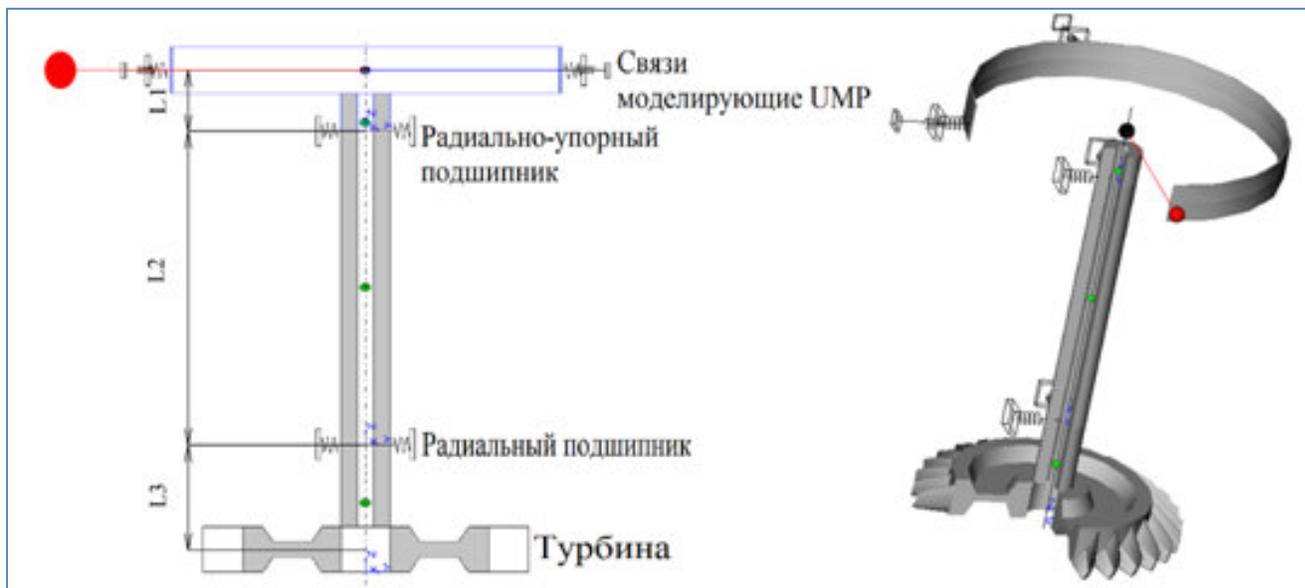


Рис. 2 Модель генератора в Dynamics R4.

Таблица 1

<b>Валопровод</b>	
Длина L1, м	1.32
Длина L2, м	6.83
Длина L3, м	2.286
Внешний диаметр, м	1
Внутренний диаметр, м	0.35
<b>Ротор генератора</b>	

Масса, кг	238898
Полярный момент инерции, кгм <sup>2</sup>	2.952e6
Диаметральный момент инерции, кгм <sup>2</sup>	1.556e6
Диаметр, м	8.066
Длина, м	1.9
Количество полюсов	60
Воздушный зазор между ротором и статором, м	0.017
Линейная нагрузка в статоре, А/м	90000
Индукция магнитного поля в зазоре, Тл	0.45
<b>Турбина</b>	
Масса, кг	50414
Полярный момент инерции, кг*м <sup>2</sup>	1.7619e5
Диаметральный момент инерции, кг*м <sup>2</sup>	1.3757e5
<b>Подшипники</b>	
Жесткость радиально-упорного подшипника, Н/м	4.905e8
Жесткость радиального подшипника, Н/м	6.54e8
Коэффициент демпфирования, Нсек/м	1e6

Коэффициент магнитной жесткости рассчитан по формуле (8) и равен  $k_e = 1.168e8$  Н/м. К центру тяжести ротора приложена дисбалансная нагрузка, рассчитанная согласно стандарту ГОСТ ИСО 1940-1-2007 по формуле:

$$U_{per} = 1000 \frac{(e_{per} \cdot \Omega) m}{\Omega} \quad (13)$$

где  $U_{per}$  – допустимый остаточный дисбаланс [Г·мм],  $(e_{per} \cdot \Omega)$  – показатель класса точности балансировки [мм/с],  $e_{per}$  – допустимый остаточный удельный дисбаланс [м],  $m$  – масса ротора [кг],  $\Omega$  – угловая частота вращения ротора [рад/с].

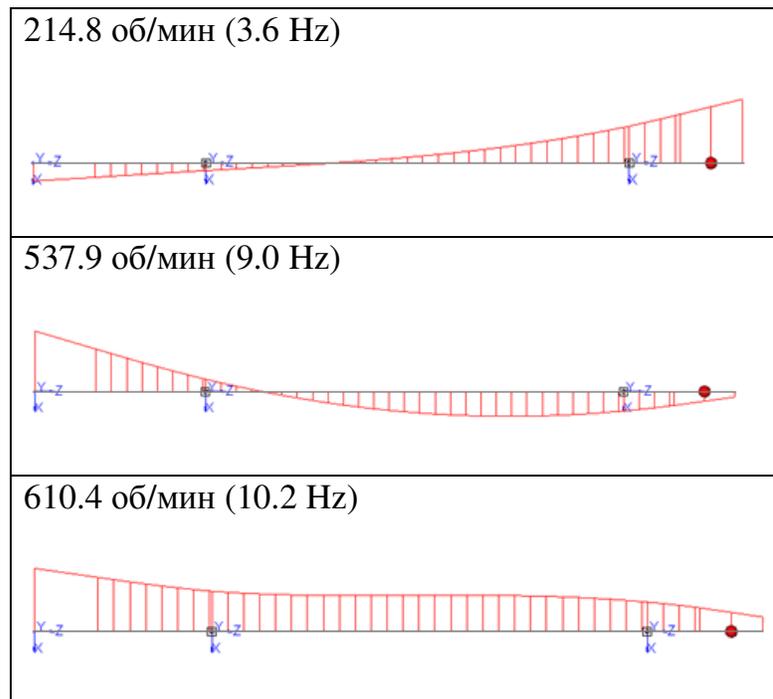
Для данной установки:

$$U_{per} = 1000 \frac{(e_{per} \cdot \Omega) m}{\Omega} = 1000 \frac{6.3 \cdot 340362}{25.13} = 85327520 \text{ г} \cdot \text{мм}$$

### Стационарный анализ

В таблице 1 представлены частоты и формы собственных колебаний системы.

Таблица 2



В таблице 3 предоставлено распределение потенциальной энергии по собственным частотам колебаний системы. Знание распределения позволяет

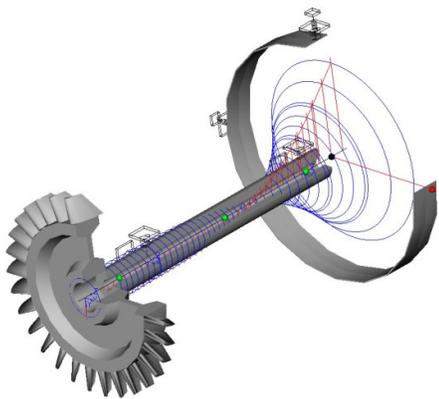
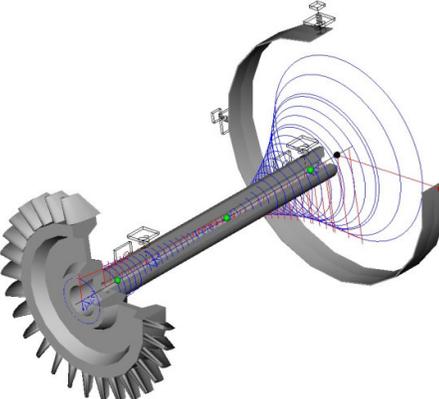
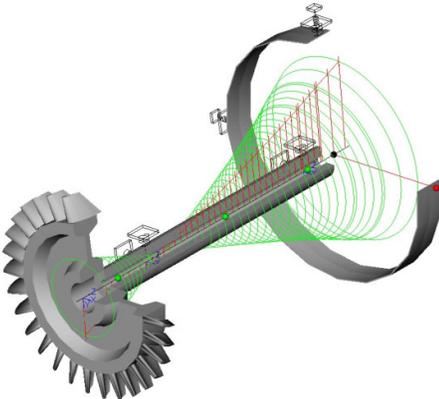
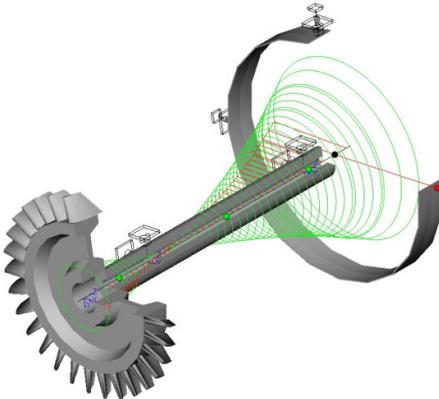
выделить элементы, изменением жесткости которых, можно управлять положением собственных частот колебаний.

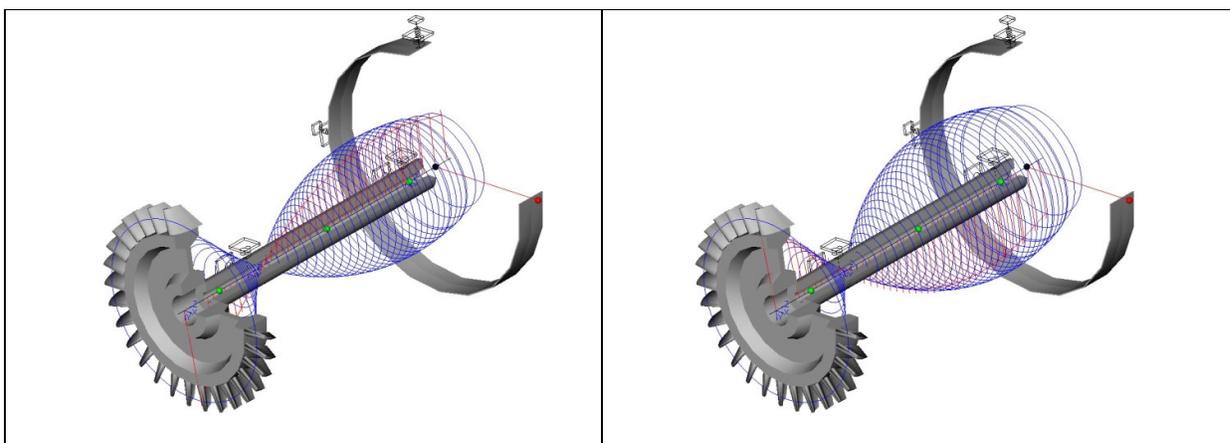
Таблица 3

Подсистемы и связи	Частоты собственных колебаний, об/мин		
	214.8	537.9	610.4
Ротор генератора	8.983	8.974	7.289
Вал	32.764	57.959	13.582
Турбина	0.026	7.196	5.486
Радиальный подшипник	6.478	9.473	54.152
Радиально–упорный подшипник	115.446	17.429	21.677
UMP	-63.698	-1.031	-2.186

Связь UMP имеет отрицательную потенциальную энергию, что противоречит физике. Отрицательный знак появляется в распределении энергий, вследствие того, что жесткость связи, моделирующей действие электромагнитной силы, задана отрицательной. Изменение величины UMP может оказывать влияние на собственную частоту по первой форме колебаний.

В таблице 4 представлены критические частоты и формы колебаний системы с учетом и без учета UMP.

Без учета UMP	С учетом UMP
<p>202.5 об/мин (3.4 Hz)</p> <p>Обратная прецессия</p> 	<p>166.9 об/мин (2.8 Hz)</p> <p>Обратная прецессия</p> 
<p>359.4 об/мин (6.0 Hz)</p> <p>Прямая прецессия</p> 	<p>283.8 об/мин (4.7 Hz)</p> <p>Прямая прецессия</p> 
<p>441.8 об/мин (7.4 Hz)</p> <p>Обратная прецессия</p>	<p>421.4 об/мин (7.0 Hz)</p> <p>Обратная прецессия</p>



На Рис. 3 изображена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) системы.

Без учета UMP резонансный пик появился на частоте вращения 359.4 об/мин. Амплитуда колебаний при резонансе составляет 5.1 мм. С учетом UMP, смоделированной в виде линейной связи с отрицательным коэффициентом жесткости равным  $-116800000$  Н/м, резонанс наблюдается на частоте вращения 283.8 об/мин, при этом амплитуда колебаний равна 4.3 мм. Наличие UMP приводит к снижению критической частоты вращения роторной системы. Уменьшение амплитуды колебаний не является эффектом воздействия UMP на систему, а обусловлено уменьшением величины неуравновешенной силы, вызванной дисбалансом.

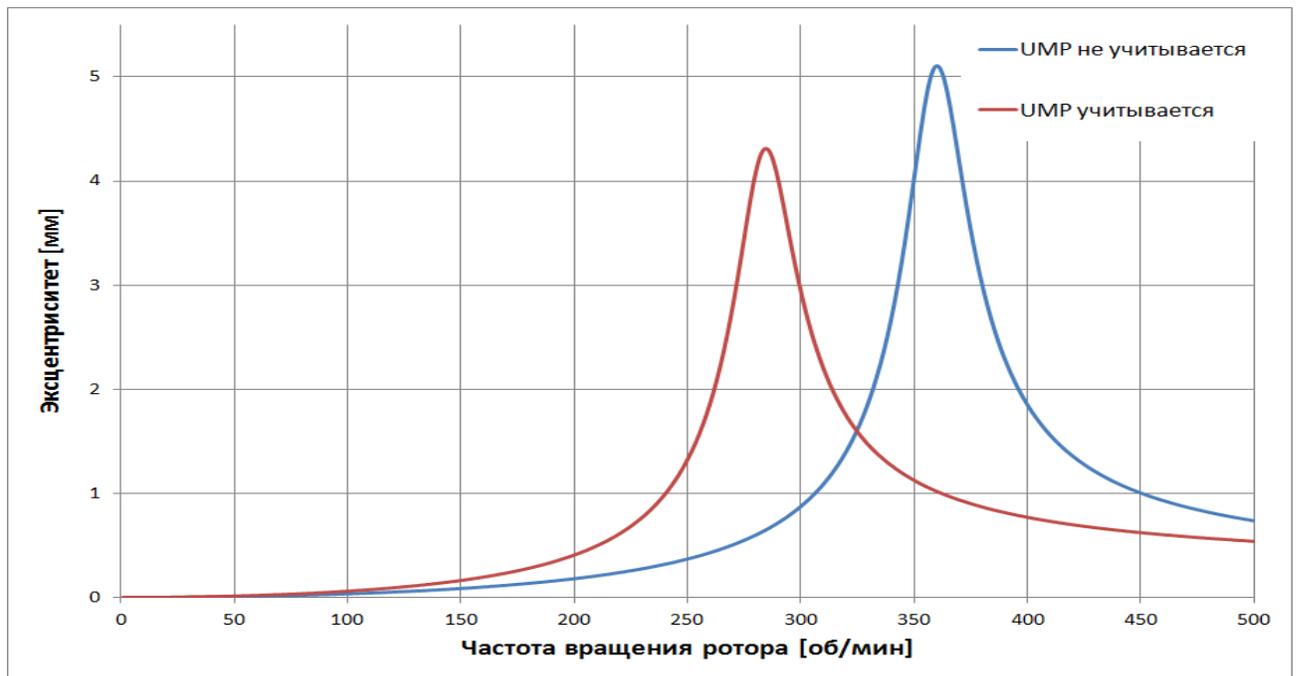


Рис. 3 АЧХ системы с учетом и без учета UMP

Максимальная рабочая частота вращения ротора для исследуемого гидрогенератора 180 об/мин, что гораздо ниже частоты резонанса. Однако даже на частотах ниже резонансных UMP будет оказывать влияния на уровни вибраций. На Рис. 4 хорошо видно, что наличие UMP приводит к большим амплитудам колебаний в рабочем диапазоне оборотов.

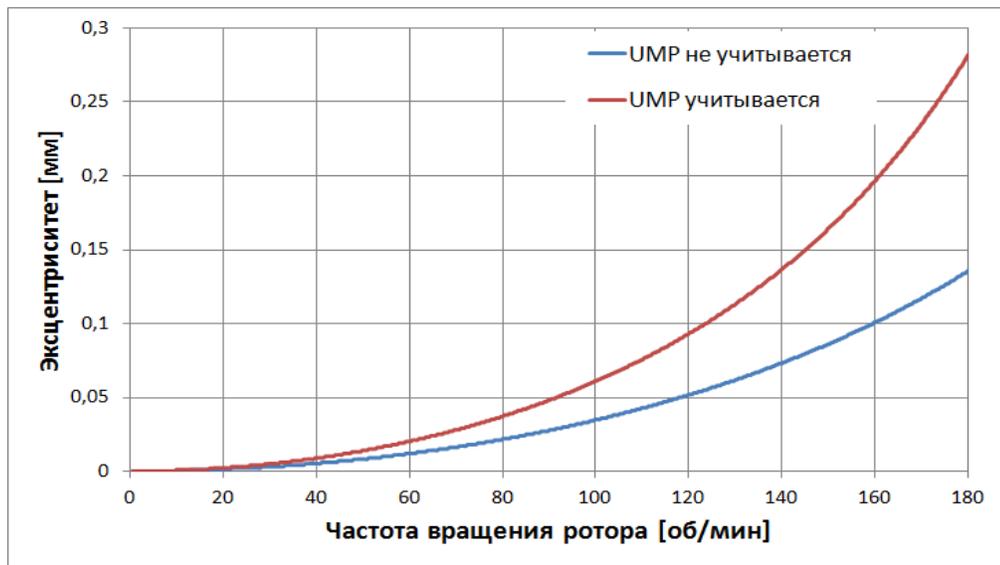


Рис. 4 АЧХ системы в рабочем диапазоне оборотов.

### Нестационарный анализ

При динамическом анализе системы в нестационарной постановке, моделировался разгон генератора от 0 до 500 об/мин. В этом диапазоне лежит критическая частота системы. Для учета UMP использовалась нелинейная модель (11). В результате получена временная характеристика (Рис. 5) процесса разгона, а также ее среднее квадратичное значение (СКЗ), Рис. 6. Сравнение результатов нестационарного анализа модели ротора с линейной и нелинейной моделями UMP показывает, что графики СКЗ почти совпадают, разница между частотами резонансных пиков составляет всего 1.2%, Рис. 6.

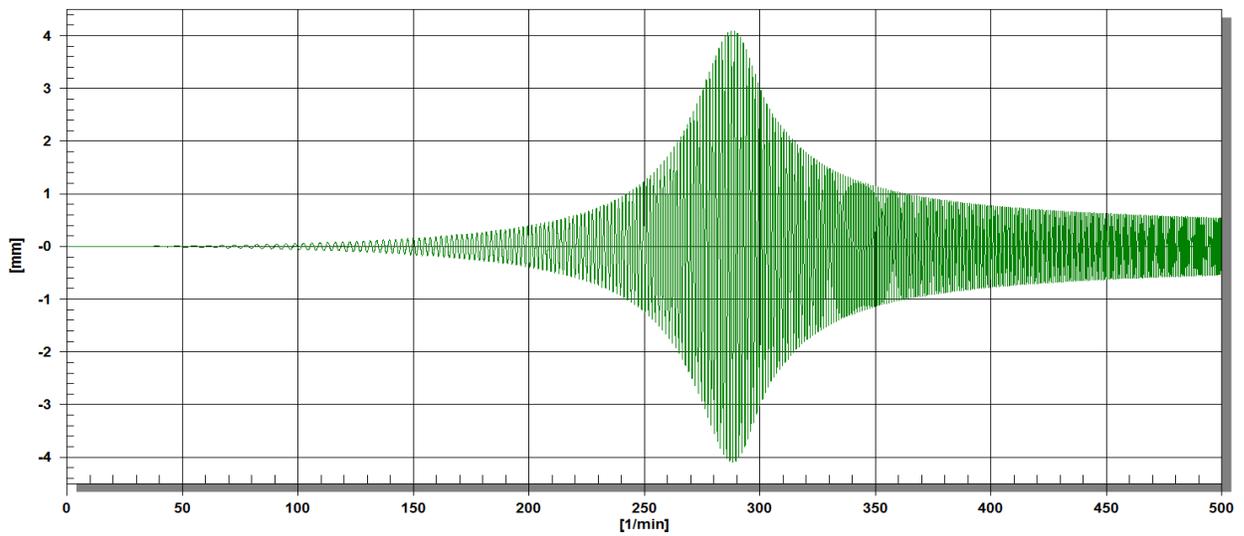


Рис. 5 АЧХ роторной системы

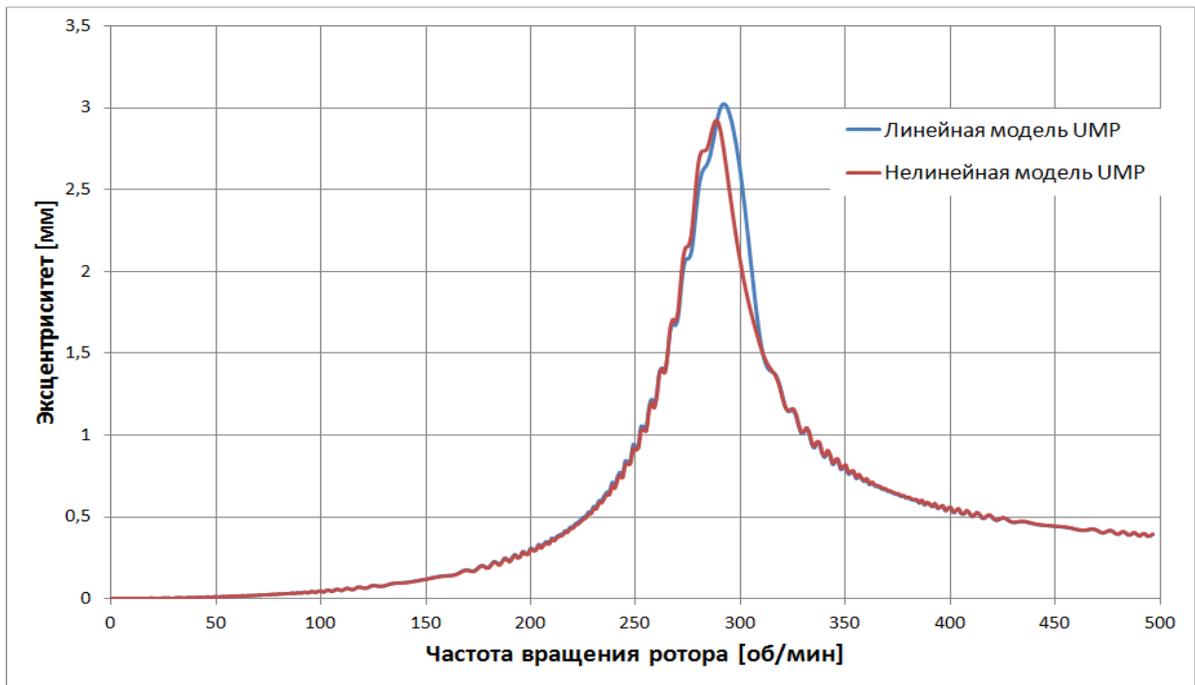


Рис. 6 СКЗ АЧХ роторной системы

UMP нелинейно зависит от эксцентриситета [9, 10]. Характер этой зависимости представлен на рис. 6. Видно, что нелинейность UMP проявляется при относительно больших эксцентриситетах  $\varepsilon \geq 0.4$ .

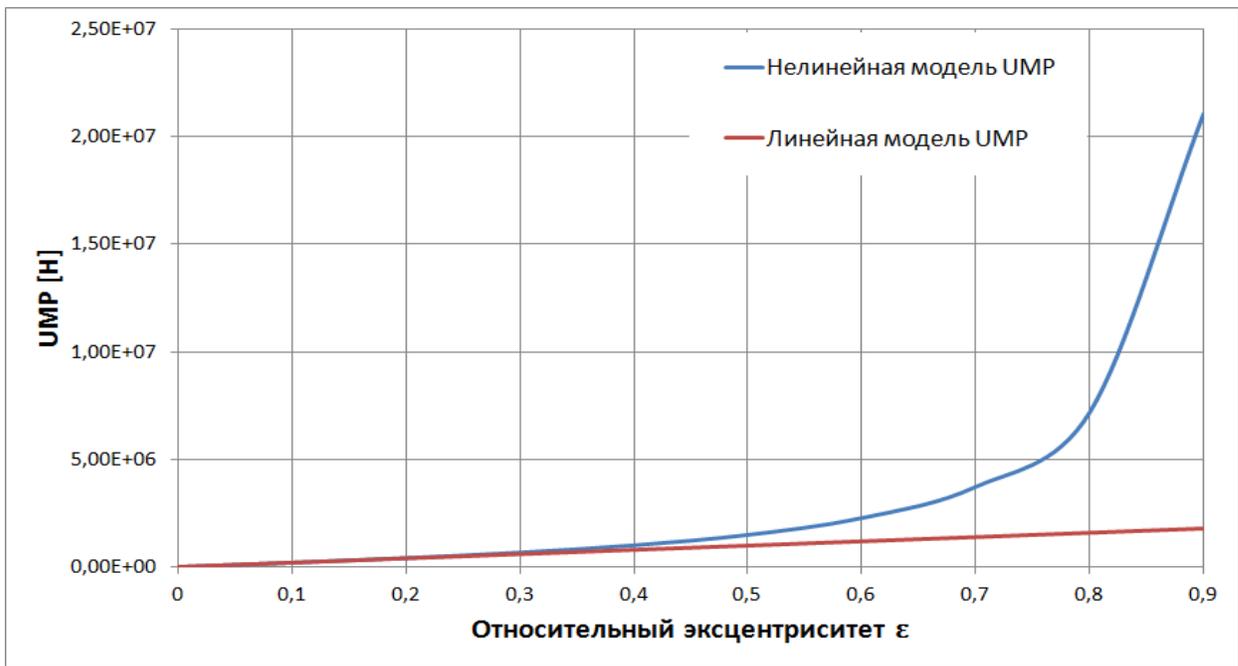


Рис. 7 Зависимость UMP от эксцентриситета в линейной и нелинейной постановке

Эффект большого эксцентриситета и его влияние на UMP показаны на рис. 8. Для достижения относительного эксцентриситета больше чем 0,4 к исследуемой модели приложен повышенный дисбаланс величиной 250000000 г\*мм (в 3 раза больше чем величина, рассчитанная по (13)). На рис. 8 видно, что в случае расчета с нелинейным UMP резонансный пик лежит ниже, чем в случае с линейным. Соответственно, основываясь на предыдущих результатах, можно утверждать, что с использованием нелинейной модели мы получаем большие значения действующей UMP. То же самое наблюдается в реальном эксперименте [12].

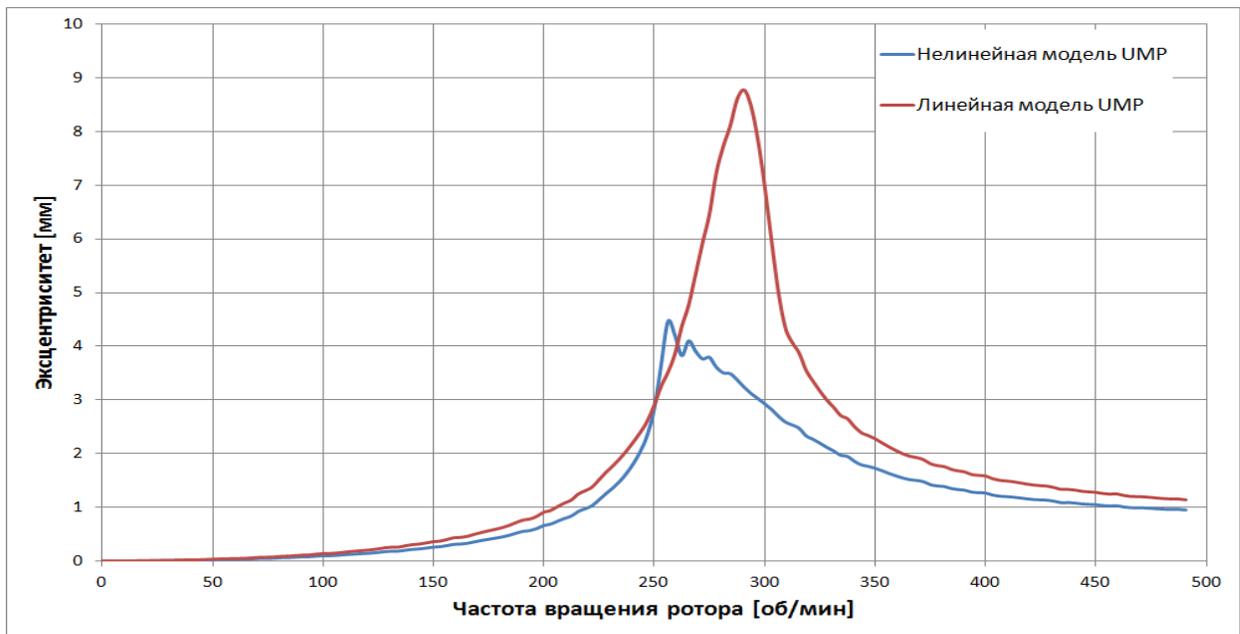


Рис. 8 СКЗ АЧХ роторной системы при больших эксцентриситетах  
(дисбаланс 25000000 г\*см)

## Заключение

На основании проведенного исследования можно заключить, что UMP оказывает ощутимое влияние на колебания роторов электрических машин. UMP снижает критические скорости вращения, что приводит к появлению резонансов на меньших частотах вращения, меняет амплитуды колебаний. Результаты показывают необходимость учета UMP в задачах роторной динамики электрических машин. UMP возможно рассчитать, применяя различные методики. Основное преимущество представленной методики заключается в относительной простоте и минимуме исходных данных. Реализация этого алгоритма в программной системе Dynamics R4 позволяет производить наиболее полный анализ роторной динамики электрических машин. Это дает возможность инженерам, не имеющим специальной подготовки в области электромеханики, производить учет UMP при решении динамических задач.

## Литература

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. В. Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1980 – Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов/ Под ред. Ф. М. Диментберга и К. С. Колесникова. 1980. 544 с, ил.
2. Pennacchi P. Nonlinear effects due to electromechanical interaction in generators with smooth poles. *Electrical Engineering* (2005) 88: 13–24
3. Rolf. K. Gustavsson The influence of magnetic pull on the stability of generators rotors. The 10th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery Honolulu, Hawaii, March 07-11, 2004
4. Z Song and Z Ma Nonlinear vibration analysis of an eccentric rotor with unbalance magnetic pull 25th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 12 (2010)
5. Mattias Nässelqvist Simulation and Characterization of Rotordynamic Properties for Hydropower Units. Vattenfall Research & Development.
6. Arkkio, A. Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic field and circuit equations, *Acta Polytechn. Scand. Electr. Eng. Ser.*, 1987, **59**, pp 97.
7. Arkkio, M. Antila, K. Pokki, A. Simon, and E. Lantto, "Electromagnetic force on a whirling cage rotor," *IEE Proceedings , Electric Power Applications*, vol. 147, pp. 353-360, 2000.
8. Andrej Burakov. Modeling the unbalanced magnetic pull in eccentric-rotor electrical machines with parallel windings. Doctoral Dissertation. Helsinki University of Technology.

9. Damir Žarko, Drago Ban, Ivan Vazdar and Vladimir Jarić. Calculation of unbalanced magnetic pull in a salient-pole synchronous generator. 14th International Power Electronics and Motion Control Conference, EPE-PEMC 2010.
10. Шубов И.Г. Шум и вибрация электрических машин. Л., «Энергия», 1973.
11. Holopainen, Timo P. Electromechanical interaction in rotordynamics of cage induction motors. Espoo 2004. VTT Publications 543. 64 p. + app. 81 p.
12. Computed field models of electromagnetic devices. S.Wiak and E. Napieralska-Juszezak (Eds.) IOS Press, 2010
13. Rolf Gustavsson. Modelling and analysis of hydropower generator rotors. Luleå University of Technology. The Polhem Laboratory Division of Computer Aided Design 2005
14. Дегтярев С.А., Иванов А.В., Леонтьев М.К. Программная система расчета динамики роторов Dynamics R4. Свидетельство об отраслевой разработке №6691. Отраслевой фонд алгоритмов и программ. Государственный информационный центр информационных технологий. Министерство образования Российской Федерации. 2006 г.
15. Pyrhönen, Juha. Design of rotating electrical machines / Juha Pyrhönen, Tapani Jokinen, Valéria Hrabovcová ; translated by Hanna Niemelä. p. cm. Includes bibliographical references and index. ISBN 978-0-470-69516-6 (cloth)